2. ZP – 6.5.2009

Při řešení diferenciálních rovnic věnujte pozornost též následujícím problémům:

- *pro jaké hodnoty y, x má rovnice smysl ?*
- *jsou nalezená řešení maximální, či je lze napojovat ?*
- *u nalezených řešení uvádějte vždy definiční obor !*

$$xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2} \tag{A1}$$

$$y' - xy = -y^3 \exp(-x^2) \tag{A2}$$

$$xy' = y\big(1 + \ln(y/x)\big) \tag{B1}$$

$$y' + \frac{xy}{2(1+x^2)} = \frac{x}{2y} \tag{B2}$$

A1 $\quad xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$

rovnice předpokládá:
$|x| \geq |y| \iff |z| \leq 1$

homogenní: $\quad y(x) = x\,z(x)$

$y'(x) = z(x) + x\,z'(x)$

$$x\left(z + xz'\right) = xz + \sqrt{x^2 - x^2 z^2}$$

$$x^2 z' = \sqrt{x^2(1 - z^2)} = |x|\sqrt{1 - z^2}$$

(a) $z \equiv \pm 1$; $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $y_1 = x$; $x \in \mathbb{R}$ je řešení

$y_2 = -x$

(b) $z \in (-1, 1)$; $x > 0$:

$$\frac{z'}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{1}{x}$$

$\arcsin z = C + \ln x$ -- <u>Diskuse</u>: $z \in (-1, 1)$

$\arcsin z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

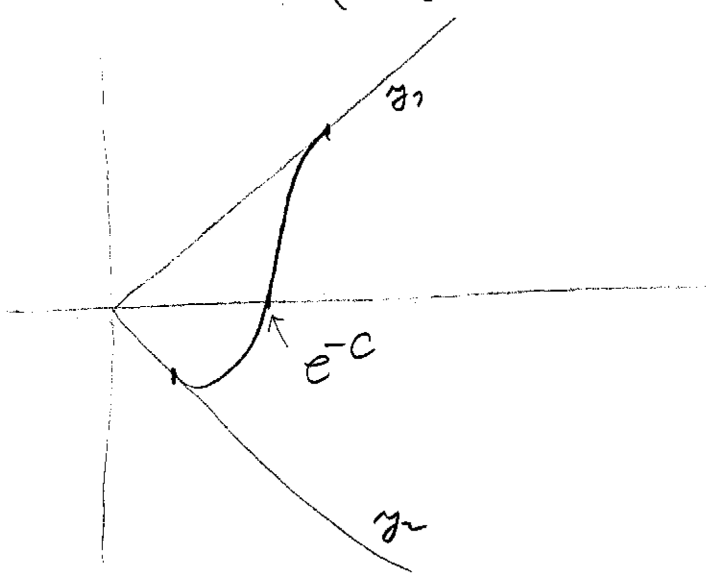
$-\frac{\pi}{2} < C + \ln|x| < \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} - C < \ln x < \frac{\pi}{2} - C$

$x \in \left(\exp\left(-\frac{\pi}{2} - C\right), \exp\left(\frac{\pi}{2} - C\right)\right) =: I_C$

$$z = \sin(C + \ln x)$$

$$\boxed{y_3 = x \cdot \sin(C + \ln x), \quad x \in I_C}$$



(c) $z \in (-1,1)$; $\underline{x<0}$:

$$\frac{z'}{\sqrt{1-z^2}} = -\frac{1}{x} \quad ;$$

$$\arcsin z = C - \ln|x| = C - \ln(-x)$$

<u>Diskuse</u>: $\quad z \in (-1,1)$

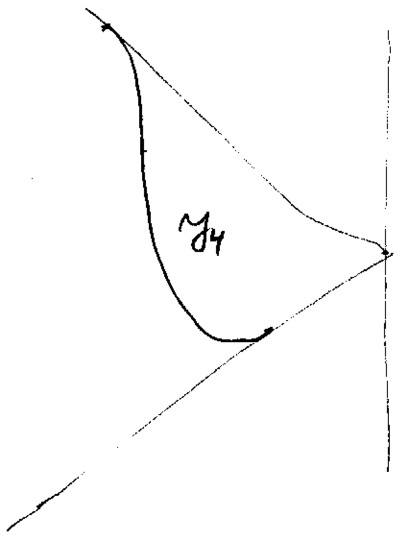
$$\arcsin z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$-\frac{\pi}{2} < C - \ln(-x) < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} - C < -\ln(-x) < \frac{\pi}{2} - C$$

$$-\exp\left(\frac{\pi}{2}+c\right) < x < -\exp\left(-\frac{\pi}{2}+c\right)$$

$$x \in J_c := \left(-\exp\left(\frac{\pi}{2}+c\right), -\exp\left(-\frac{\pi}{2}+c\right)\right).$$



$$\boxed{\begin{array}{c} y_4 = x \cdot \sin\big(C - \ln(-x)\big) \\ x \in J_c \end{array}}$$

<u>Napojení</u>: lze v bodech $\pm\exp\left(\pm\frac{\pi}{2} \pm c\right)$; např.

$$y(x) = \begin{cases} -x; & x \leq \exp\left(-\frac{\pi}{2}-c\right) \\ x \sin(c+\ln x); & x \in \left(\exp\left(-\frac{\pi}{2}-c\right), \exp\left(\frac{\pi}{2}-c\right)\right) \\ x; & x \geq \exp\left(\frac{\pi}{2}-c\right). \end{cases}$$

A2 $\quad y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$

Bernoulli $\qquad z = \frac{1}{y^2} = y^{-2}$

$$z' = -2y'y^{-3}$$

Pozn.: $\quad$ nutně $z > 0$;

$$y_1 \equiv 0;\ x \in \mathbb{R} \text{ je řešení.}$$

$$z' + 2xz = 2e^{-x^2} \quad ; \quad \text{i.f.: } e^{x^2}$$

$$\left(z e^{x^2}\right)' = 2$$

$$z = e^{-x^2}(2x + c) \quad ; \quad z > 0:\ 2x + c > 0$$

$$x > -\frac{c}{2}$$

$$y_{2,3} = \frac{\pm 1}{\sqrt{z}} = \frac{\pm e^{x^2/2}}{\sqrt{2x+c}} \ ; \ x \in \left(-\frac{c}{2}, +\infty\right)$$

řešení nelze prodloužit:

$$\lim_{x \to -\frac{c}{2}+} y_{2,3}(x) = \pm\infty$$

(B1) $xy' = y\left(1 + \ln \frac{y}{x}\right)$

homogenní: $y(x) = x\,z(x)$

$y'(x) = z(x) + x\,z'(x)$

rovnice předpokládá: $y/x > 0 \iff x \neq 0;\ z > 0$

$$x\,(xz' + z) = xz\,(1 + \ln z)$$

$$z' = \frac{1}{x}\, z \ln z$$

(a) $\ln z = 0$: $z \equiv 1$; $x \neq 0$: $y_1(x) = x$; $x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, \infty)$.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(b)}\ \ln z < 0 : & z \in (0,1) \\ \text{(c)}\ \ln z > 0 : & z \in (1, \infty) \end{array}\right\}\ \text{společný výpočet} -$$

$$\frac{z'}{z \ln z} = \frac{1}{x}$$

$$\ln|\ln z| = \ln|x| + c \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

Diskuse: (b) i (c): $|\ln z| \in (0, \infty)$

$\ln|\ln z| \in \mathbb{R}$ -- žádné omezení

$$|\ln z| = |x| \cdot e^c = |x| \cdot d; \quad d > 0.$$

$$\pm \ln z = d|x|$$

$$\ln z = kx; \qquad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$z = e^{kx}; \quad y = x e^{kx}; \quad x \in (0, \infty),\ (-\infty, 0).$$

Napojení: není možné, neboť

$$y' = \underbrace{\frac{y}{x}\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)}$$

$$\in C^1 \text{ v } \Omega = \left\{(x,y);\ \frac{y}{x}>0\right\}$$

<u>Pozn.:</u> $x \neq 0$ -- rce nemá smysl.

(B2) $$y' + \frac{xy}{2(x^2+1)} = \frac{x}{2y}$$

rovnice požaduje $y \neq 0$

Bernoulli: $z = y^2$ nutně $z > 0$.

$z' = 2yy'$

$$z' + \frac{x}{x^2+1} z = x$$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \ln(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

i.f.: $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\left[z(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]' = x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}$$

(subst $x^2 = y$

$$z(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = C + \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}$$

<u>Diskuse:</u> $z > 0$

$$C + \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} > 0$$

$$(1+x^2)^{3/2} > -3C$$

(α) $C \geq 0$ ... platí vždy

(β) $C < 0$ ... $1+x^2 > (-3C)^{2/3}$

$(-3C > 0)$ $x^2 > (-3C)^{2/3} - 1$

(βi) $(-3C)^{2/3} - 1 < 0$

-- platí vždy

(βii) $(-3C)^{2/3} - 1 \geq 0$

$$|x| > \sqrt{(-3C)^{2/3} - 1} = k_C$$

$x \in (-\infty, -k_C)$

$(k_C, +\infty)$

$$y = \pm\sqrt{z} = \pm\sqrt{\frac{c}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{3}(1+x^2)}$$

$x \in$ -- intervaly uvedené výše.

řešení nelze prodloužit: lim v krajních bodech $\underbrace{0}$ nebo $+\infty$

$y=0$ nevyhoví rovnici

nepojovalní nelze: $y' = f(x,y) = \frac{x}{2y} - \frac{xy}{2(x^2+1)}$

$\in C^\infty$ v $\Omega = \{y \neq 0\}$.