15. Stejnoměrná konvergence.

Definice. Řekneme, že funkce $f_n(x) : I \to \mathbb{R}$ konvergují v I bodově k funkci $f(x)$, jestliže pro $\forall x \in I$ platí
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,.$$
Značíme $f_n(x) \to f(x)$ v I.

Příklady. ① $f_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n$. Potom $f_n(x) \to \exp x$ v $\mathbb{R}$.
② $f_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|}$. Potom $f_n(x) \to \operatorname{sgn} x$ v $\mathbb{R}$.
③ $f_n(x) = n^2 x \exp(-nx) \to 0$ v $[0,\infty)$.

Poznámka. Příklady demonstrují některé nedostatky bodové konvergence.
Pokud $f_n(x) \to f(x)$, a $f_n(x)$ jsou spojité, pak $f(x)$ nemusí být spojitá (příklad 2).
Pokud $f_n(x) \to f(x)$ v $[a,b]$, nemusí být $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$ (příklad 3 pro $[a,b]=[0,1]$).
To nás motivuje k zavedení lepšího, silnějšího pojmu konvergence funkcí.

Definice. Řekneme, že funkce $f_n(x) : I \to \mathbb{R}$ konvergují v I stejnoměrně k funkci $f(x)$, jestliže
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall x \in I)(\forall n \geq n_0)\Big[|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big]\,. \tag{1}$$
Značíme $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I.

Poznámka. $f_n(x) \to f(x)$ bodově v I, právě když
$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in I)(\exists n_0 \in N)(\forall n \geq n_0)\Big[|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big]\,. \tag{2}$$
Rozdíl je pouze v pořadí kvantifikace x a n_0. Při bodové konvergenci nejprve fixuji x, pak volím n_0, tj. n_0 může obecně záviset na x.
Při stejnoměrné konvergenci najdu jedno n_0, které pak funguje pro všechna $x \in I$.

Věta 15.1. Nechť $f_n(x)$ jsou spojité v I, nechť $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I. Potom $f(x)$ je spojitá v I.

Věta 15.2. Nechť $f_n(x)$ jsou spojité v omezeném intervalu $[a,b]$, nechť $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v $[a,b]$. Potom $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$ pro $n \to \infty$.

Poznámka. $K = \sup_{x\in I} g(x)$ znamená 1. $g(x) \leq K$ pro $\forall x \in I$ a 2. $\forall K' < K\ \exists x \in I$ tak, že $g(x) > K'$. Souhrnně: K je nejmenší horní odhad pro $g(x)$ na I.

Lemma 15.1. Nechť $f_n(x)$ jsou definovány v I. Potom následující výroky jsou ekvivalentní:
(1) $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I
(2) $\sigma_n \to 0$ pro $n \to \infty$, kde $\sigma_n := \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$
(3) pro libovolnou posloupnost $\{x_n\} \subset I$ platí: $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$ pro $n \to \infty$

Poznámka. Často užívané úvahy:
1. Jestliže existují a_n (čísla nezávislá na x) taková, že $a_n \to 0$ a platí $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ pro $\forall x \in I$, tak potom $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I.

2. Jestliže existují $x_n \in I$ taková, že $|f_n(x_n) - f(x_n)| \not\to 0$, pak $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ v I.

Příklad. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Potom $f_n(x) \to 0$ v $[0,\infty)$; $f_n(x) \not\rightrightarrows 0$ v $[0,\infty)$; pro $\forall \eta > 0$ pevné $f_n(x) \rightrightarrows 0$ v $[\eta,\infty)$; pro žádné $\delta > 0$ není $f_n(x) \rightrightarrows 0$ v $[0,\delta)$.

Definice. Řekneme, že funkce $f_n(x)$ konvergují k $f(x)$ lokálně stejnoměrně v I, jestliže

$$(\forall x_0 \in I)(\exists \delta > 0)\big[f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ v } I \cap U(x_0,\delta)\big] .$$

Značíme $f_n(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f(x)$ v I.

Příklad. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Potom $f_n(x) \not\rightrightarrows 0$ v $(0,\infty)$, avšak $f_n(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0$ v $(0,\infty)$.

Poznámky. Zjevně platí: stejnoměrná konvergence se přenáší na menší množinu, tj. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I, $J \subset I \implies f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v J.
Dále: stejnoměrná konvergence $\implies$ lokálně stejnoměrná konvergence $\implies$ bodová konvergence. (Žádnou implikaci nelze obrátit.)

Věta 15.1.' Nechť $f_n(x) \in C(I)$, nechť $f_n(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f(x)$ v I. Potom $f(x) \in C(I)$.

Poznámka. Připomeňme, že posloupnost $\{a_n\}$ konverguje (tj. $\exists a \in \mathbb{R}$ tak, že $a_n \to a$), právě když platí Bolzano-Cauchyho podmínka konvegence:

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall m,n \geq n_0\big)\big[|b_m - b_n| < \varepsilon\big] . \qquad \text{(BC)}$$

Definice. Řekneme, že funkce $f_n(x)$ splňují v I Bolzano-Cauchyho podmínku stejnoměrné konvergence, jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall x \in I\big)\big(\forall m,n \geq n_0\big)\big[|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon\big] . \quad (\text{BC} - \text{st})$$

Věta 15.3. Nechť $f_n(x)$ jsou definovány v I. Potom je ekvivalentní:
(1) existuje funkce $f(x)$ taková, že $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I
(2) $f_n(x)$ splňují v I Bolzano-Cauchyho podmínku stejnoměrné konvergence

Důsledek. $C([a,b])$ je úplný metrický prostor (vzhledem k metrice $\varrho(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$).

Poznámka. Jsou-li $f_n(x) : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, pak obecně

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{x\to\infty} f_n(x)\Big) \neq \lim_{x\to\infty}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big) .$$

Příklad. Nechť $f_n(x) = \operatorname{arctg}(x/n)$; potom $\lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to\infty} f_n(x)) = \pi/2$, zatímco $\lim_{x\to\infty}(\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = 0$.

Věta 15.4. [Moore-Osgood.] Nechť $f_n(x)$, $f(x)$ jsou definovány v $\mathcal{P}(x_0,\delta)$ (x_0, $\delta > 0$ pevné.)
Nechť

1. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v $\mathcal{P}(x_0, \delta)$;
2. pro $\forall n$ pevné existuje konečná $\lim_{x\to x_0} f_n(x)$ – značme ji c_n.

Potom
1. existuje konečná $\lim_{n\to\infty} c_n$ – značme ji c;
2. platí $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$.

Poznámka. Závěr 2 vlastně říká

$$\lim_{x\to x_0}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\Big).$$

Může být $x_0 = \pm\infty$, a platí jednostranné verze (tj. pro $x \to x_0\pm$, pracuji na $\mathcal{P}_\pm(x_0, \delta)$.)

Poznámka. Další nevýhodou bodové konvergence je, že obecně

$$f_n(x) \to f(x) \not\Rightarrow f_n'(x) \to f'(x)\,,$$

dokonce ani

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \not\Rightarrow f_n'(x) \to f'(x)\,.$$

Příklad. Polož $f_n(x) = n^{-1} \operatorname{arctg} nx$; potom $f_n(x) \rightrightarrows 0$ v $\mathbb{R}$, leč $f_n'(0) = 1$ pro $\forall n$, tj. $f_n'(x) \not\to 0$.

Věta 15.5. [Derivace člen po členu.] Nechť $f_n(x)$ jsou diferencovatelné v otevřeném intervalu I. Nechť existují $f(x)$, $g(x)$ takové, že $f_n(x) \to f(x)$, $f_n'(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} g(x)$ v I.
Potom $f(x)$ je diferencovatelná a $f'(x) = g(x)$ v I.

Poznámka. Věta v podstatě říká, že

$$\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)\,.$$

Věta 15.5'.[Integrace člen po členu.] Nechť $u_n(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} u(x)$ v I, nechť $\int u_n(x)\,dx = U_n(x)$ v I, a nechť $U_n(x) \to U(x)$ v I.
Potom $\int u(x)\,dx = U(x)$ v I.

Poznámka. Závěr věty zapsaný jinak:

$$\int \lim_{n\to\infty} u_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int u_n(x)\,dx\,.$$

Definice. Nechť $f_k(x) : I \to \mathbb{C}$ jsou dány. Označme

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,.$$

Řekneme, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

konverguje stejnoměrně v I, jestliže existuje funkce $s(x) : I \to \mathbb{C}$ taková, že $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$ v I.
Řekneme, že řada konverguje lokálně stejnoměrně v I, jestliže existuje $s(x)$ taková, že $s_n(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} s(x)$ v I.

Věta 15.6. [Nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady.]
Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I. Potom $f_n(x) \rightrightarrows 0$ v I.

Definice. Řekneme, že řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ splňuje v I Bolzano-Cauchyho podmínku (BC-st-r) stejnoměrné konvergence, jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall x \in I\big)\big(\forall n \geq n_0\big)\big(\forall p \in \mathbb{N}\big)\Big[\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\Big| < \varepsilon\Big].$$

Věta 15.7. Nechť $f_k(x) : I \to \mathbb{C}$ jsou dány. Potom je ekvivalentní:
(1) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I
(2) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ splňuje v I (BC-st-r)

Definice. Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje absolutně stejnoměrně v I, jestliže řada $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ konverguje stejnoměrně v I.

Věta 15.8. Nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje absolutně stejnoměrně v I. Potom konverguje stejnoměrně v I.

Věta 15.9. [Weierstrass.] Jsou dány $f_k(x) : I \to \mathbb{C}$. Nechť existují čísla a_k (nezávislá na x) taková, že
1. $|f_k(x)| \leq a_k$ pro $\forall x \in I$, $\forall k \in \mathbb{N}$;
2. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.
Potom $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje absolutně stejnoměrně v I.

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{k^2}\right)$ konverguje lokálně absolutně stejnoměrně v $\mathbb{R}$. Nekonverguje stejnoměrně v $\mathbb{R}$.

Poznámka. Užitečné odhady: $|\sin y| \leq |y|$, $|\operatorname{arctg} y| \leq |y|$ pro $\forall y \in \mathbb{R}$; $0 \leq \ln(1+y) \leq y$ pro $\forall y \geq 0$.

Věta 15.10. [Stejnoměrná verze Leibnizova kritéria.] Nechť $g_k(x) \rightrightarrows 0$ v I, nechť pro $\forall x \in I$ pevné je posloupnost $\big\{g_k(x)\big\}_{k=1}^{\infty}$ monotónní.
Potom $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k g_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I.

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{kx}{1+k^2x^2}$ konverguje stejnoměrně v $[\delta, +\infty)$ pro $\forall \delta > 0$ pevné. Nekonverguje stejnoměrně v $[0, +\infty)$.

Definice. Řekneme, že $f_n(x)$ jsou stejnoměrně omezené v I, jestliže

$$\big(\exists M > 0\big)\big(\forall x \in I\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\big[|f_n(x)| \le M\big]\,.$$

Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ má v I stejnoměrně omezené částečné součty, jestliže

$$\big(\exists M > 0\big)\big(\forall x \in I\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\Big[\Big|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\Big| \le M\Big]\,.$$

Věta 15.11. [Stejnoměrná verze Dirichletova kritéria.] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ má v I stejnoměrně omezené částečné součty, nechť $g_k(x) \rightrightarrows 0$ v I, a nechť pro $\forall x \in I$ pevné je posloupnost $\big\{g_k(x)\big\}_{k=1}^{\infty}$ monotónní.
Potom $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) g_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I.

Poznámka. Z Lemmatu 10.4 plyne pro $\forall x \neq 2k\pi$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \sin kx\right| \le \frac{1}{|\sin(x/2)|}\,, \qquad \left|\sum_{k=0}^{n} \cos kx\right| \le \frac{1}{|\sin(x/2)|}\,.$$

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ konverguje stejnoměrně v $[\delta, 2\pi - \delta]$ pro $\delta > 0$ pevné. Nekonverguje stejnoměrně v $[0, \delta]$.

Poznámka. Nechť existuje n_0 (nezávislé na x) takové, že $f_k(x) = g_k(x)$ pro $\forall x \in I$, $\forall k \ge n_0$. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I, právě když $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I.

Věta 15.12. [Stejnoměrná verze Abelova kritéria.] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I. Nechť $g_k(x)$ jsou stejnoměrně omezené v I, a nechť pro $\forall x \in I$ pevné je posloupnost $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ monotónní. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) g_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I.

Věta 15.13. Nechť $f_k(x) \in C(I)$, nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I. Označme $s(x)$ její součet. Potom $s(x) \in C(I)$.

Příklad. Z dřívějška víme, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x)\,, \qquad \forall x \in (-1, 1)\,.$$

Podle Věty 15.12 řada vlevo konverguje stejnoměrně v $[0, 1]$; podle Věty 15.13 je její součet $s(x)$ spojitý v $[0, 1]$, speciálně je spojitý v bodě 1 zleva.
Tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = s(1) = \lim_{x\to 1-} s(x) = \lim_{x \to 1-} \ln(1+x) = \ln 2\,.$$

Třetí rovnost díky tomu, že $s(x) = \ln(1+x)$ na $P_-(1)$; čtvrtá ze spojitosti fce ln.

Věta 15.14. Nechť $f_k(x) \in C(I)$, kde $I = [a,b]$ je omezený, uzavřený interval. Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I. Potom

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx\,.$$

Věta 15.15. Nechť $f_k(x)$ jsou diferencovatelné v I (otevřený interval). Nechť pro $\forall x \in I$ pevné $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje, nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ konverguje lokálně stejnoměrně v I. Potom součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ je diferencovatelná funkce a platí

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)\,, \qquad \forall x \in I\,.$$

Poznámka. Výsledky kapitoly lze přímočaře zobecnit na situaci $f_n(x) : M \to Y$, kde $M \subset X$ a X, Y jsou metrické prostory. (V případě řad musí být Y vektorový prostor, ve větách o B.C. podmínce musí být Y úplný.)

Poznámka. Speciálním případem řady funkcí je mocninná řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{MR}$$

Viz kapitola 11 minulého semestru. Je-li R poloměr konvergence, platí:
Tvrzení 1. Řada (MR) konverguje absolutně stejnoměrně na $U(0,r)$ pro každé $r < R$; konverguje lokálně absolutně stejnoměrně na $U(0,R)$.
Tvrzení 2. [Abelova věta] Nechť řada (MR) konverguje pro nějaké $x = z \in \mathbb{C}$, kde $|z| = R$. Potom konverguje stejnoměrně na úsečce $[0;z]$.