17. Lebesgueova míra.

Motto: „*Dospělý člověk musí znát míru.*“

Značení. $X \ldots$ libovolná množina; symbolem 2^X značíme potenční množinu neboli množinu všech podmnožin X.
Připomeňme dále: rozdíl množin $A \setminus B = \{x \in A: \ x \notin B\}$, spočetné sjednocení množin (index j probíhá $\mathbb{N}$):

$$\bigcup_j A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \{x : \ \exists j \ x \in A_j\},$$

spočetný průnik množin:

$$\bigcap_j A_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \{x : \ \forall j \ x \in A_j\}.$$

De Morganovy vzorce:

$$B \setminus \bigcup_j A_j = \bigcap_j (B \setminus A_j), \qquad B \setminus \bigcap_j A_j = \bigcup_j (B \setminus A_j).$$

Definice. Nechť X je libovolná množina. Řekneme, že $\mathscr{S} \subset 2^X$ je σ-algebra, pokud

1. $\emptyset, X \in \mathscr{S}$
2. $A \in \mathscr{S} \implies X \setminus A \in \mathscr{S}$
3. jsou-li $A_j \in \mathscr{S}$, $j \in \mathbb{N}$, je $\bigcup_j A_j \in \mathscr{S}$

Poznámka. Z vlastností σ-algebry dále plyne:

- jsou-li $A, B \in \mathscr{S}$, je také $A \setminus B \in \mathscr{S}$
- jsou-li $A_j \in \mathscr{S}$, $j \in \mathbb{N}$, je $\bigcap_j A_j \in \mathscr{S}$

Souhrně řečeno je σ-algebra systém množin, který je uzavřený na spočetné (=sigma) opakování množinových operací.

Příklady. $\mathscr{S} = \{\emptyset, \ X\}$ a $\mathscr{S} = 2^X$ jsou σ-algebry.

Definice. Nechť X je libovolná množina, $\mathscr{S} \subset 2^X$. Funkce $\mu : \mathscr{S} \to [0, +\infty]$ se nazve míra na X, jestliže

1. $\mathscr{S}$ je σ-algebra;
2. $\mu\emptyset = 0$

3. jsou-li $A_j \in \mathscr{S}$, $j \in \mathbb{N}$ disjunktní, je

$$\mu\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu A_j.$$

Trojice $(X, \mathscr{S}, \mu)$ se nazývá prostor s mírou, prvky $\mathscr{S}$ se nazývají měřitelné nebo μ-měřitelné množiny. Třetí vlastnost míry se nazývá σ-aditivita.

Příklady. ① Počítací míra p: X je libovolná množina, $\mathscr{S} = 2^X$; $pA =$ počet prvků A, je-li A konečná, a $pA = \infty$, je-li A nekonečná.
② Diracova míra δ_a v bodě a: X je libovolná množina, $a \in X$ pevně zvolený bod, $\mathscr{S} = 2^X$. $\delta_a(A) = 1$ pokud $a \in A$ a $\delta_a(A) = 0$ pokud $a \notin A$.
③ Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^n$ - zobecnění pojmu objem. Korektní zavedení Lebesgueovy míry je hlavním úkolem této kapitoly. Nelze $\mathscr{S} = 2^{\mathbb{R}^n}$, tj. existují Lebesgueovsky neměřitelné množiny, u nichž by pokus o přiřazení objemu vedl ke sporu, viz následující –

Banach-Tarského paradox. Nechť $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ jsou libovolné (!) otevřené množiny v $\mathbb{R}^n$, kde $n \geq 3$. Potom existuje $N \in \mathbb{N}$ a množiny F_j, $j = 1, \dots, N$ (vzájemně disjunktní) a množiny G_j, $j = 1, \dots, N$ (též vzájemně disjunktní) takové, že

$$\mathcal{F} = \bigcup_{j=1}^{N} F_j\,, \qquad \mathcal{G} = \bigcup_{j=1}^{N} G_j\,.$$

Navíc, G_j vznikne z F_j posunutím a otočením.

Věta 17.1. [Základní vlastnosti míry.] Nechť $(X, \mathscr{S}, \mu)$ je prostor s mírou, nechť A, A_j, B, $B_j \in \mathscr{S}$. Potom

1. $A \subset B \implies \mu A \leq \mu B$;
2. je-li $A_j \subset A_{j+1}$ pro $j \in \mathbb{N}$, pak $\lim_{j\to\infty} \mu A_j = \mu(\bigcup_j A_j)$;
3. je-li $B_j \supset B_{j+1}$ pro $j \in \mathbb{N}$, navíc $\mu B_1 < \infty$, pak $\lim_{j\to\infty} \mu B_j = \mu(\bigcap_j B_j)$.

Poznámky. Předpoklad $\mu B_1 < \infty$ v bodě 3 je podstatný: μ počítací míra na $\mathbb{N}$, $B_j = \{n \in N : n \geq j\}$. Pak $\mu B_j = \infty \not\to \mu(\bigcap_j B_j) = \mu(\emptyset) = 0$.
Pomocí triku zdisjunktnění (viz níže) se též snadno ukáže, že každá míra je σ-subaditivní: jsou-li $A_j \in \mathscr{S}$ *libovolné*, pak

$$\mu\left(\bigcup_j A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu A_j.$$

Trik zdisjunktnění. Pro libovolné množiny A_j, $j \in \mathbb{N}$ definujeme

$$\tilde{A}_j := A_j \setminus \bigcup_{k<j} A_k.$$

Potom $\tilde{A}_j$ jsou vzájemně disjunktní, přitom

$$\bigcup_{j\le n} A_j = \bigcup_{j\le n} \tilde{A}_j, \qquad \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \tilde{A}_j.$$

Definice. Intervalem v $\mathbb{R}$ rozumíme některou z množin

$$I = (a,b),\ [a,b],\ (a,b],\ [a,b).$$

Definujeme délku intervalu $\ell_1(I) = b - a$. Připouštíme prázdné, jednobodové i neomezené intervaly. Intervalem v $\mathbb{R}^n$ rozumíme „kvádr“

$$Q = I_1 \times \cdots \times I_n = \big\{x \in \mathbb{R}^n;\ x_j \in I_j\big\},$$

kde I_j jsou intervaly v $\mathbb{R}$. Objemem intervalu $Q \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme

$$\ell_n(Q) = \ell_1(I_1)\ell_1(I_2)\dots\ell_1(I_n);$$

pro účely této definice klademe $0 \cdot \infty = 0$.
Pokud je z kontextu jasné, že $Q \subset \mathbb{R}^n$, píšeme $\ell(Q)$ místo $\ell_n(Q)$.

Poznámky. Mezi intervaly speciálně patří: prázdná množina, jednobodová množina, přímky, roviny a vůbec „útvary nižší dimenze“ (jejichž objem je nula). Dále otevřený poloprostor

$$\big\{x \in \mathbb{R}^n;\ x_j > c\big\} = \mathbb{R} \times \dots (c, +\infty) \cdots \times \mathbb{R};$$

a uzavřený poloprostor

$$\big\{x \in \mathbb{R}^n;\ x_j \ge c\big\} = \mathbb{R} \times \dots [c, +\infty) \cdots \times \mathbb{R}.$$

Otevřeným (resp. uzavřeným) intervalem míníme $Q = I_1 \times \cdots \times I_n$, jsou-li všechny $I_j \subset \mathbb{R}$ otevřené (resp. uzavřené).
Otevřený (resp. uzavřený) interval lze napsat jako průnik konečně mnoha otevřených (resp. uzavřených) poloprostorů. Otevřený (uzavřený) interval je otevřená (uzavřená) podmožina v $\mathbb{R}^n$ vzhledem k obvyklé metrice.

Definice. [Vnější Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^n$.] Pro libovolnou $M \subset \mathbb{R}^n$ definujeme

$$\lambda_n^*(M) = \inf\ \Big\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell_n(Q_j);\ \ Q_j \subset \mathbb{R}^n \text{ jsou intervaly},\ M \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j \Big\}.$$

Číslo $\lambda_n^*(M)$ se nazývá vnější Lebesgueova míra množiny $M \subset \mathbb{R}^n$. Nehrozí-li nedorozumění, píšeme opět λ^* místo λ_n^*.

Poznámky. Snadno nahlédneme, že platí:

- $0 \le \lambda^*(M) \le +\infty$

- $\lambda^*(\emptyset) = \lambda^*(\{a\}) = 0$
- $A \subset B \implies \lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$
- λ^* je translačně invariantní, tj. $\lambda^*(M) = \lambda^*(a+M)$ pro každé $a \in \mathbb{R}^n$, kde

$$a + M := \big\{a + m;\ m \in M\big\}.$$

- trochu těžší je dokázat, že λ^* se nemění ani otočením množiny (je rotačně invariantní)

Věta 17.2. Nechť $M_j \subset \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$, jsou *libovolné* množiny. Potom

$$\lambda^*\big(\bigcup_j M_j\big) \leq \sum_j \lambda^*(M_j).$$

Jinými slovy, vnější míra je σ-subaditivní.

Lemma 17.1. [O konečném podpokrytí.] Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $K \subset X$ kompaktní, nechť $K \subset \bigcup_j A_j$, kde A_j jsou otevřené. Potom existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $K \subset \bigcup_{j \leq n} A_j$.

Lemma 17.2. Nechť Q, $Q_j \subset \mathbb{R}^n$ jsou intervaly. Jestliže $Q \subset \bigcup_j Q_j$, potom $\ell(Q) \leq \sum_j \ell(Q_j)$.

Důsledek. Pro každý interval $Q \subset \mathbb{R}^n$ je $\lambda^*(Q) = \ell(Q)$.

Definice. Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ se nazve měřitelná podle Carathéodoryho, pokud

$$\lambda^*(T) = \lambda^*(T \cap A) + \lambda^*(T \setminus A)$$

platí pro libovolnou „testovací" množinu $T \subset \mathbb{R}^n$.

Věta 17.3. [Carathéodoryova.] Označme

$$\mathscr{M}_n = \big\{M \subset \mathbb{R}^n;\ M \text{ je měřitelná dle Carathéodoryho}\big\}.$$

Potom $\mathscr{M}_n$ je σ-algebra a $\lambda_n^* : \mathscr{M}_n \to [0, +\infty]$ je míra.

Terminologie. $\mathscr{M}_n$ nazýváme Lebesgueovsky měřitelné podmnožiny $\mathbb{R}^n$; Lebesgueovu míru množiny $M \subset \mathbb{R}^n$ definujeme takto:

$$\lambda_n(M) := \begin{cases} \lambda_n^*(M), & \text{pokud } M \in \mathscr{M}_n, \\ \text{není definováno pro } M \notin \mathscr{M}_n. \end{cases}$$

Píšeme většinou $\mathscr{M}$, λ, tj. symbol n se vynechává, je-li z kontextu jasné, v jakém $\mathbb{R}^n$ se pohybujeme.

Lemma 17.3. Každý interval $Q \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelný a $\lambda(Q) = \ell(Q)$.

Věta 17.4. [Další vlastnosti Lebesgueovy míry.]

1. Otevřené a uzavřené množiny jsou měřitelné.
2. Lebesgueova míra je translačně invariantní.
3. Lebesgueova míra je rotačně invariantní.[1]

Poznámka. Z důkazu předchozí věty též vyplývá: je-li $G \subset \mathbb{R}^n$ neprázdná, otevřená množina, pak $\lambda(G) > 0$.

Definice. Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ se nazve množina míry nula (nulová množina), jestliže $A \in \mathscr{M}_n$ a $\lambda_n(A) = 0$.

Věta 17.5. [Vlastnosti nulových množin.]

1. A je nulová, právě když $\lambda^*(A) = 0$.
2. A je nulová, $B \subset A \implies B$ je nulová.
3. A_j jsou nulové, $j \in \mathbb{N} \implies \bigcup_j A_j$ je nulová; speciálně spočetné množiny jsou nulové.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná. Řekneme, že výrok $V(x)$ platí skoro všude (zkratka „s.v.") v M, jestliže existuje nulová množina $N \subset M$ tak, že $V(x)$ platí pro každé $x \in M \setminus N$.

Příklady. ① Skoro všechna reálná čísla jsou iracionální ($N = \mathbb{Q}$).
② Funkce $\varphi : (x, y) \mapsto |x| + |y|$ je diferencovatelná skoro všude v $\mathbb{R}^2$. Zde $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0 \text{ nebo } y = 0\}$, což je sjednocení dvou přímek (intervaly nulového objemu).

[1] Bez důkazu.