20. Plošný integrál

obecný problém: integrace přes k-rozměrné objekty v $\mathbb{R}^n$

Pozn. $k=1$, n obecné: kap. 19

$k=2$, $n=3$; kap 20

$k<n$ obecné : příští semestr

Def. Množina $P \subset \mathbb{R}^3$ se nazve jednoduchá plocha, pokud $P = \varphi(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast a φ splňuje (i) φ je C^1, prosté

(ii) $h(\nabla\varphi) = 2$ všude v Ω

(iii) $\varphi_{-1} : P \to \Omega$ je spojité

(φ, Ω) ... parametrizace plochy

Poznámka: $\varphi = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v))$

$$\nabla\varphi = \begin{pmatrix} \partial_u\varphi_1 & \partial_v\varphi_1 \\ \partial_u\varphi_2 & \partial_v\varphi_2 \\ \partial_u\varphi_3 & \partial_v\varphi_3 \end{pmatrix}$$

Poznámka : (ii) $\Leftrightarrow$ $\partial_u\varphi$, $\partial_v\varphi$ jsou lineárně nezávislé (LN)

(iii) $\Leftrightarrow$ kraj plochy se nedotýká vnitřku

Příklad ① graf $f : \Omega \to \mathbb{R}$; C^1

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ omezená oblast

parametrizace : (φ, Ω) ; $\varphi(u,v) = (u, v, f(u,v))$; $(u,v) \in \Omega$

$\partial_u\varphi = (1, 0, \partial_u f)$

$\partial_v\varphi = (0, 1, \partial_v f)$

② sféra : $\varphi : (u,v) \mapsto (x,y,z)$; $x = \sin u \cos v$

$(u,v) \in \Omega = (0,\pi)\times(0,2\pi)$ $\quad y = \sin u \sin v$

$z = \cos u$

$$\partial_u\varphi = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u)$$
$$\partial_v\varphi = (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0)$$

$\det \square = \sin u \cos u = \frac{1}{2}\sin 2u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2}$

viz $\Omega = \dots$

pro $u \neq \frac{\pi}{2}$ O.K.

pro $u = \frac{\pi}{2}$: $\left.\begin{matrix}(0,0,-1) \\ (-\sin v, \cos v, 0)\end{matrix}\right\}$ LN

Opakování: [Vnější součin v $\mathbb{R}^3$]

$\underset{\sim}{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$\underset{\sim}{v} = (v_1, v_2, v_3)$ $\qquad$ $\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$

Platí $\quad (\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{w}) \times \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{w} \times \underset{\sim}{v}$

$(a\underset{\sim}{u}) \times \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{u} \times (a\underset{\sim}{v}) = a(\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v})$

$\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v} = -\underset{\sim}{v} \times \underset{\sim}{u}$

Geom. význam: $\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v} = 0 \iff \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}$ jsou LZ

$\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}$ jsou LN $\to$ $\underset{\sim}{w} = \underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v}$ je vektor jednoznačně určený těmito vlastnostmi:

(1) $\underset{\sim}{w}$ je kolmý na $\mathrm{Lin}\{\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}\}$ // lin. obal

(2) $\|\underset{\sim}{w}\|$ je rovna ploše ~~toho~~ rovnoběžníku určeného $\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}$

(3) $\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{w}$ tvoří (v tomto pořadí) kladně orientovanou bázi

$\iff \det(u \mid v \mid w) > 0$

$\qquad\quad \| \; w \cdot (\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v})$

Def. $P \subset \mathbb{R}^3$ jednoduchá plocha, $f: P \to \mathbb{R}$. Plošný integrál 1. druhu funkce f přes P definujeme

$$\int_P f \, dS := \int_\Omega f \circ \varphi \, \|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\| \, du\,dv$$

kde (φ, Ω) je libovolná parametrizace

otázka korektnosti, dokážeme

Příkl. plocha sféry $\displaystyle\int_P 1 \, dS = \int_\Omega \sin u \, du\, dv = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin u \, du\right) dv = 4\pi$

$\quad \llcorner$ Fubini

Jednoduchá plocha: $P \subset \mathbb{R}^3$, $\exists$ param. $\underset{\sim}{\varphi}: \Omega \to P$, 1-1, C^1, $h(\nabla\varphi) = 2$, $\varphi_{-1}: P \to \Omega$ spojité

Def. $X \in P$

tečný prostor: $T_{\underset{\sim}{X}}(P) = \mathrm{Lin}\{\partial_u \underset{\sim}{\varphi}(\varphi_{-1}(\underset{\sim}{X})), \partial_v \underset{\sim}{\varphi}(\varphi_{-1}(\underset{\sim}{X}))\}$

normála: $\quad \underset{\sim}{n}(\underset{\sim}{X}) = \pm\left(\dfrac{\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi}{\|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\|}\right)(\varphi_{-1}(\underset{\sim}{X}))$

Def. Orientace jednoduché plochy = rozlišit „rub a líc"

Poznámka: Každá parametrizace vyjadřuje orientaci $\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi$ ve směru „lícové" strany

Parametrizace je/není ve shodě s orientací

Příklad (sféra) $\underset{\sim}{\varphi}(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$

$\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi = (\sin^2 u \cos v, \sin^2 u \sin v, \cos u \sin u)$

normála směřuje „ven"

Poznámka Pro normálu ve shodě s orientací, vyjádřenou parametrizací $(\underset{\sim}{\varphi}, \Omega)$ platí $\underset{\sim}{n} \circ \underset{\sim}{\varphi} = \dfrac{\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi}{\|\partial_u \underset{\sim}{\varphi} \times \partial_v \varphi\|}$ v Ω

Def. $P \subset \mathbb{R}^3$ jedn. orientovaná plocha, $\underset{\sim}{F}: P \to \mathbb{R}^3$. Plošný integrál 2. druhu funkce $\underset{\sim}{F}$ přes P definujeme

$$\int_P \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s} = \int_\Omega (F \circ \varphi) \cdot (\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi)\, du\, dv,$$

$\quad\llcorner\!\to$ skalární součin

kde $(\underset{\sim}{\varphi}, \Omega)$ je libovolná parametrizace ve shodě s orientací P

Pozn. integrand vpravo $= \det \begin{pmatrix} \underset{\sim}{F} \circ \underset{\sim}{\varphi} \\ \partial_u \underset{\sim}{\varphi} \\ \partial_v \underset{\sim}{\varphi} \end{pmatrix}$ // pozor na pořadí = znaménko!

/* Pozn. integrand vpravo */ $\underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s} = F_1\, dy\, dz + F_2\, dz\, dx + F_3\, dx\, dy$

Věta 20.2 [Vztah int. 1. a 2. druhu]

Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ je jednoduchá orientovaná plocha

$\underset{\sim}{F}: P \to \mathbb{R}^3$

Potom $\int_P \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s} = \int_P (\underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{n})\, ds$, kde $\underset{\sim}{n}$ je normála P volená ve shodě s orientací

dk. $(\underset{\sim}{\varphi}, \Omega)$ param. ve shodě s orientací

PS $\int_\Omega (\underset{\sim}{F} \cdot n) \circ \varphi \|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\|\, du\, dv = \int_\Omega (\underset{\sim}{F} \circ \underset{\sim}{\varphi}) \cdot (\underset{\sim}{n} \circ \varphi) \|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\|\, du\, dv$

$\underset{\sim}{n} \circ \varphi = \dfrac{\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi}{\|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\|}$ $= LS$

Def. $P \subset \mathbb{R}^3$ se nazve zobecněná plocha, jestliže

(*) $\quad P = \bigcup_{j=1}^{m} P_j \cup \Gamma$; P_j … jednoduché plochy; $\overline{P_j} \overset{(+)}{\cap} P_i = \emptyset$ $\forall\, i \neq j$

$\llcorner\!\to$ přípustný rozklad

(není jednoznačný) $\quad\Gamma$ … konečné sjednocení jednoduchých křivek

Pozn. $\overline{P_j} = P_j \cup \beta$ … okraj plochy

(+) → „okraj" P_j nezasahuje do P_i

Příklad: $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$: a) sférické souřadnice (vypadne jeden poledník, Γ)

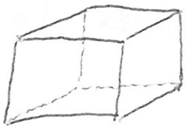
b) 2× kartézské, param. $\varphi(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$

$\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2,\ u^2 + v^2 < 1\}$

Příkl. ∂K ; $K = [0,1]^3$

přípustný rozklad : $\bigcup\limits_{j=1}^{6} P_j \cup \bigcup\limits_{j=1}^{12} \gamma_j \to \Gamma$

„stěny" „hrany"



Poznámka

Def Zobecněná plocha je orientovaná, je-li zvolen přípustný rozklad a jeho elementy P_j jsou orientované (tzv. orientovaný rozklad)

Def $P \subset \mathbb{R}^3$ zob. plocha, (*) přípustný (orientovaný) rozklad, $f: P \to \mathbb{R}$, $\underset{\sim}{F}: P \to \mathbb{R}^3$

$$\int_P f\, ds := \sum_{j=1}^{m} \int_{P_j} f\, ds$$

$$\int_P \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s} = \sum_{j=1}^{m} \int_{P_j} \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s}$$

Věta 20.1. [Gaussova]

Nechť $O \subset \mathbb{R}^3$ je „rozumná" oblast, $\underset{\sim}{F}: O \to \mathbb{R}^3$ je C^1 na jistém okolí $\overline{O}$

Nechť ∂O je zobecněná plocha

Potom $\int_O \operatorname{div} \underset{\sim}{F}\, d\lambda_3 = \int_{\partial O} \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{n}\, ds$; $\underset{\sim}{n}$ ... normála ∂O, jdoucí ven z O

$\operatorname{div} \underset{\sim}{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$

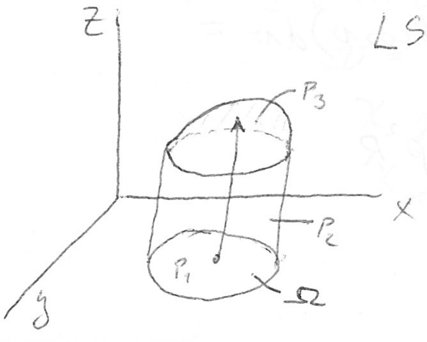
dk

- princip skládaný : platí pro $O_1, O_2 \to$ platí pro $O_1 \cup O_2$
$O_1 \setminus O_2$
- platí po složkách :

$$\int_O \frac{\partial F_3}{\partial z}\, d\lambda_3 = \int_{\partial O} F_3 n_3\, ds$$

$\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial y}$ $\quad F_1 n_1, F_2 n_2$

$$O = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 < z < f(x,y);\ (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2;\ f \dots C^1\}$$



LS : Fubini $\int_\Omega \left(\int_0^{f(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dz \right) dx\, dy =$

$$= \int_\Omega F_3(x,y,f(x,y)) - F_3(x,y,0)\, dx\, dy$$

PS: $\int_{P_1} + \int_{P_2} + \int_{P_3}$

$$\int_{P_1} F_3 n_3 dS = \int_{P_1} -F_3 dS = -\int_{\Omega} F_3(x,y,0)\,dx\,dy$$

$$\int_{P_2} F_3 n_3 dS = 0 \quad \text{neboť} \quad \underset{\sim}{n} = (n_1, n_2, 0)$$

$\int_{P_3}$: $\underset{\sim}{\varphi}(u,v) = (u, v, f(u,v))$; $(u,v) \in \Omega$

$\underset{\sim}{n} \circ \underset{\sim}{\varphi} = \partial_u \underset{\sim}{\varphi} \times \partial_v \underset{\sim}{\varphi} = (-\partial_u f, -\partial_v f, 1)$

$$\int_{P_3} F_3 n_3 dS = \int_{\Omega} \underbrace{(F_3 \circ \varphi)(n_3 \circ \varphi) \| \partial_u \varphi \times \partial_v \varphi \|}\, du\,dv = \int_{\Omega} F_3(u,v,f(u,v))\,du\,dv$$

opak. $\pm n \circ \varphi = \dfrac{\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi}{\|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\|}$ $\quad (\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi)_3 = +1$

Poznámka $\quad \int_{O} \operatorname{div} \underset{\sim}{F}\, d\lambda_3 = \int_{\partial O} \underset{\sim}{F} \cdot n\, dS \overset{V20.2}{=} \int_{\partial O} \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{S}$

Příklad: Objem anuloidu (A) $\quad \lambda_3(A) = \int_A 1\, d\lambda = \int \operatorname{div} \underset{\sim}{F}\, d\lambda_3 = \int_{\partial A} \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{S}$

kde $\underset{\sim}{F}$ je vhodné pole, $\operatorname{div} \underset{\sim}{F} = 1$, volíme $\underset{\sim}{F} = (0, 0, z)$

parametrizace ∂A: $\gamma(v) = (R + \rho\cos v, 0, \rho \sin v)$; $v \in (0, 2\pi)$

$$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\gamma(v)\right]^T$$

$$\varphi(u,v) = (\cos u (R + \rho\cos v), \sin u (R + \rho \cos v), \rho \sin v)$$

$$\Omega := (u,v) \in (0,2\pi) \times (0, 2\pi)$$

$\partial_u \varphi = (-\sin u (R + \rho\cos v), \cos u (\ldots), 0)$

$\partial_v \varphi = (-\rho \cos u \sin v, -\rho \sin u \sin v, \rho \cos v)$

$X = (\ldots, \ldots, (R + \rho \cos v)\sin v)$

$\int_{\Omega} \underset{\sim}{F}(\varphi) \cdot (\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi)\, du\,dv$ $\quad$ $u = 0$, $v = \frac{\pi}{2}$ $\quad \rho R > 0 \ldots \underset{\sim}{n} \circ \varphi$ směřuje nahoru, tj. ven

$$= \int_{\Omega} \underbrace{\rho \sin v}_{F_3 \circ \varphi} \cdot \underbrace{\rho (R + \rho \cos v) \sin v}_{(\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi)_3}\, du\,dv =$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \cdots\, dv \right) du = 2\pi \rho^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 v (R + \rho \cos v)\, dv =$$

$$= 2\pi \rho^2 \Big(R \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 v}_{\pi} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 v \cos v}_{\left[-\frac{\sin^3 v}{3}\right]_0^{2\pi} = 0} = 2\pi^2 \rho^2 R$$

Vzoreček: $\|\underset{\sim}{\alpha} \times \underset{\sim}{\beta}\|^2 = \det\begin{pmatrix} \alpha\cdot\alpha & \alpha\cdot\beta \\ \alpha\cdot\beta & \beta\cdot\beta \end{pmatrix} \quad \forall \alpha,\beta \in R^3$

dk. a) Hrubá síla: $\underset{\sim}{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\underset{\sim}{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ } dosazením a spočítáním se ukáže rovnost

b) BÚNO: $\underset{\sim}{\alpha} = (a, 0, 0)$, $\underset{\sim}{\beta} = (b, c, 0)$ } $\underset{\sim}{\alpha} \times \underset{\sim}{\beta} = (0, 0, ac)$

proč BÚNO?: lze dosáhnout otočením podle vhodných os

l.s. a^2c^2

p.s. $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2+c^2 \end{vmatrix} = a^2b^2 + a^2c^2 - a^2b^2$

l.s. = p.s.

Q... otočení: $Q\alpha \times Q\beta = Q(\alpha\times\beta)$

$Q\alpha \cdot Q\beta = \alpha\cdot\beta$

Věta 20.3. Nechť $P \subset R^3$ je jednoduchá plocha, (φ, Ω) libovolná parametrizace; $f: P \to R$.

Potom $\int_P f\, dS = \int_\Omega f\circ\varphi \sqrt{g}\, du\, dv$ kde

$g = \det\begin{pmatrix} \partial_u\varphi\cdot\partial_u\varphi, & \partial_u\varphi\cdot\partial_v\varphi \\ \partial_u\varphi\cdot\partial_v\varphi, & \partial_v\varphi\cdot\partial_v\varphi \end{pmatrix}$

je tzv. Grammův determinant fce φ

dk. $\int_P f\, dS = \int_\Omega (f\circ\varphi)\underbrace{\|\partial_u\varphi \times \partial_v\varphi\|}_{=\sqrt{g}}\, du\, dv$

$\sqrt{g}$; viz předchozí vzoreček, $\underset{\sim}{\alpha} = \partial_u\varphi$, $\underset{\sim}{\beta} = \partial_v\varphi$

Příklad: (válcové souřadnice) $P \subset \{x^2+y^2=\rho^2\}$

$\underset{\sim}{\varphi}$: $x = \rho\cos u$

$(u,v)\in\Omega$ $\quad y = \rho\sin u$

$z = v$

$\partial_u\varphi = (-\rho\sin u, \rho\cos u, 0)$

$\partial_v\varphi = (0, 0, 1)$

$g = \begin{vmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho^2$

$\int_P f\, dS = \int_\Omega f\circ\varphi\cdot\rho\, du\, dv$

Opakování: (Věta o inverzi) $X: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, $X \in C^1$ na okolí $u^0 \in \mathbb{R}^k$

$\nabla X(u^0)$ je regulární $(k\times k)$ matice

$\Rightarrow \exists\, U$ ... okolí u^0 tak, že

$V = X(U)$ je otevř.

X je prostá na U

$X_{-1}: V \to U$ je C^1

opakování difeomorfismus: $X : \Omega \to \Theta$; splňující: X je prosté; C^1, $\det \nabla X \neq 0$

a navíc X_{-1} je C^1

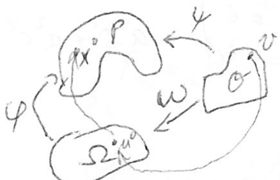
Lemma 20.1. [O reparametrisaci plochy]

Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ je jednoduchá plocha

Nechť (φ, Ω), (ψ, Θ) jsou její parametrisace

Potom $\exists$ difeomorfismus $\omega : \Theta \to \Omega$ tak, že

$\psi = \varphi \circ \omega$



dk. položme $\omega := \varphi_{-1} \circ \psi$

$\left.\begin{array}{l} \psi : \Theta \to P \text{ je spoj.} \\ \varphi_{-1} : P \to \Omega \text{ je spoj.} \end{array}\right\} \to \omega$ je dobře definováno a je spojité

? $\omega \in C^1$ ... stačí

$\omega \in C^1(V)$; V... okolí v^0

$u^0 = \omega(v^0)$ $v^0 \in \Theta$ libovolné

$x^0 = \psi(v^0) = \varphi(u^0)$

$h(\underbrace{\nabla \varphi(u^0)}_{3\times 2}) = 2$ $\exists$ regulární 2×2 matice;

BÚNO: $\left.\begin{pmatrix} \partial_1\varphi_1 & \partial_2\varphi_1 \\ \partial_1\varphi_2 & \partial_2\varphi_2 \end{pmatrix}\right|_{u_0}$ je regulární

$X : (u,v) \mapsto (\varphi_1, \varphi_2, \cancel{\varphi_3})$

$R^2 \to R^2$

VIF $\to$ $\exists\, U$ ... okolí u^0 ; $X|_U$ je prosté a inverze je C^1

lze psát $\omega = \underbrace{X_{-1} \circ \tilde\psi}_{\text{je } C^1}$; $\tilde\psi = (\psi_1, \psi_2, \cancel{\psi_3})$

? $J\omega \neq 0$ $\psi = \varphi \circ \omega$

řetízkové pravidlo: $\nabla \psi = [(\nabla\varphi)\circ\omega]\nabla\omega \Rightarrow \frac{\partial \psi_i}{\partial v_j}(v) = \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_l}(\omega(v)) \frac{\partial \omega_l}{\partial v_j}(v)$

?? $J\omega = 0 \iff h(\nabla\omega) \leq 1$

$\Rightarrow h(\text{P.S.}) \leq 1$

$\Rightarrow h(\nabla\psi) \leq 1$ SPOR: ψ parametrisace P

Důsledek Tečný prostor a normála nezávisí na parametrisaci

$T_{x^0}(P) = \mathrm{Lin}\{\partial_1\varphi(u^0); \partial_2\varphi(u^0)\}$ $\partial_i\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u_i} \in R^3$

(i) $= \mathrm{Lin}\{\partial_1\psi(v^0); \partial_2\psi(v^0)\}$ $\partial_i\psi = \frac{\partial\psi}{\partial v_i}$

$$\underbrace{(\partial_1\psi(v_0)\,;\,\partial_2\psi(v_0))}_{3\times 2} = \underbrace{(\partial_1\varphi(u_0)\,;\,\partial_2\varphi(u_0))}_{3\times 2}\underbrace{(\nabla\omega(v_0))}_{2\times 2 \text{ regulární matice}}$$

sloupa

normála: $\underset{\sim}{n}(x^0) := \dfrac{\partial_1\varphi(u_0)\times\partial_2\varphi(u_0)}{\|\cdots\|}$

$$\overset{?}{=} \frac{\partial_1\psi(v_0)\times\partial_2\psi(v_0)}{\|\cdots\|}$$

Vzoreček: $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}^3$; $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

$$(+)\quad \underbrace{(\alpha\,;\,\beta)}_{3\times 2} = \underbrace{(\gamma,\delta)}_{3\times 2}\underbrace{A}_{2\times 2} \implies \alpha\times\beta = (\gamma\times\delta)\cdot\det A$$

$(+) \iff \alpha = a\gamma + c\delta$

$\beta = b\gamma + d\delta$

$$\alpha\times\beta = \underbrace{\cancel{ab(\gamma\times\gamma)}}_{0} + ad(\gamma\times\delta) + cb(\delta\times\gamma) + \underbrace{\cancel{cd(\delta\times\delta)}}_{0}$$

$$= (ad-bc)\,\gamma\times\delta$$

tedy $\partial_1\psi(v^0)\times\partial_2\psi(v^0) = \partial_1\varphi(u^0)\times\partial_2\varphi(u^0)\cdot J\omega(v^0)$

Dodatek z L. 20.1. $J\omega\neq 0$ v Θ, Θ souvislá

$\omega\in C^1 \to J\omega\in C$

$\implies$ buď $J\omega>0$ v Θ

nebo $J\omega<0$

odpovídá situaci, kdy (φ,Ω) a (ψ,Θ) vyjadřují stejnou, resp. opačnou orientaci.

Věta 20.4. Plošný integrál nezávisí na parametrisaci; 1. druhu vůbec, 2. druhu až na znaménko (v případě neshody parametrisace s orientací)

dk. P... jednoduchá plocha; (φ,Ω), (ψ,Θ)... parametrisace

L. 20.1. $\implies \exists\ \omega:\Theta\to\Omega$ difeomorfismus

a platí $\psi = \varphi\circ\omega$

a také $(\partial_1\psi\times\partial_2\psi) = (\partial_1\varphi\times\partial_2\varphi)\circ\omega\cdot J\omega$

věta o substituci $\displaystyle\int_\Omega g\,\underset{d\lambda_2}{du} = \int_\Theta g\circ\omega\,|J\omega|\,\underset{d\lambda_2}{dv}\quad \forall g:\Omega\to\mathbb{R}$

1. druhu: $f: P \to \mathbb{R}$ $\qquad \iint_P f\, dS \underset{\text{pomocí } \varphi}{=} \underbrace{\iint_\Omega (f\circ\varphi)\,\|\partial_1\varphi\times\partial_2\varphi\|\,du}_{g;\ \text{substituce}}$

$$= \iint_O \underbrace{(f\circ\varphi)\circ\omega}_{f\circ\underbrace{\varphi\circ\omega}_{\psi}}\ \underbrace{\|(\partial_1\varphi\times\partial_2\varphi)\circ\omega\|\cdot|J\omega|}_{\|\partial_1\psi\times\partial_2\psi\|}\,dv \underset{\text{pomocí } \psi}{=} \iint_P f\,dS$$

2. druhu: $F: P\to\mathbb{R}^3$; P … orientovaná; (φ,Ω) … ve shodě s touto orientací

$$\iint_P \underset{\sim}{F}\cdot \underset{\sim}{dS} = \underbrace{\iint_\Omega (F\circ\varphi)\cdot(\partial_1\varphi\times\partial_2\varphi)\,du}_{g;\ \text{substituce}}$$

$$= \iint_O \underbrace{[(F\circ\varphi)\circ\omega]}_{F\circ\psi}\cdot\underbrace{[(\partial_1\varphi\times\partial_2\varphi)\circ\omega]\,|J\omega|}_{\pm\,\partial_1\psi\times\partial_2\psi}\,dv$$

$$\underset{\text{pomocí } \psi}{=} \pm\iint_P \underset{\sim}{F}\cdot dS$$

kde $+/-$ $\Longleftrightarrow$ $J\omega>0$ / $J\omega<0$

$\Longleftrightarrow$ φ,ψ vyjadřují stejnou/opačnou orientaci

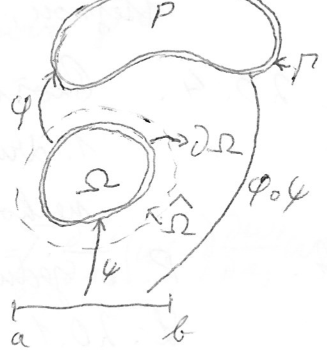
$\Longleftrightarrow$ ψ je/není ve shodě s orientací P

Def. Jednoduchá plocha $P\subset\mathbb{R}^3$ se nazve plocha s okrajem, pokud existuje parametrizace (φ, Ω) s těmito vlastnostmi:

(i) φ je C^1 a $h(\nabla\varphi)=2$ na nějaké $\hat\Omega$ otevřené, $\hat\Omega \supset\supset \Omega$ (tj. $\overline{\Omega} \subset \hat\Omega$)

(ii) $\partial\Omega$ je jednoduchá, uzavřená křivka

množina $\Gamma := \varphi(\partial\Omega)$ se nazývá okraj plochy P



Poznámka: důsledek definice: Γ je jedn. uzavř. křivka; $(\psi,[a,b])$ … param $\partial\Omega$ $\Rightarrow$ $(\varphi\circ\psi,[a,b])$ … param Γ

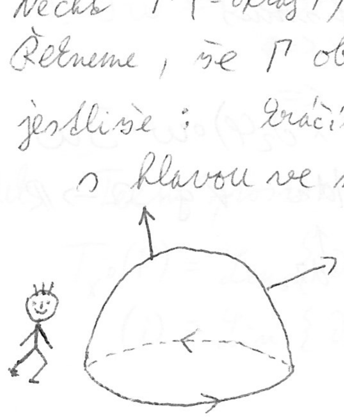
Def. Nechť plocha P je orientovaná

Nechť Γ (= okraj P) je orientovaná křivka

Řekneme, že Γ obíhá P v kladném smyslu,

jestliže: kráčíme-li po okraji ve směru obíhání Γ, s hlavou ve směru orientace P, máme P po levé ruce

↓ PRAVOTOČIVÁ SOUSTAVA



Def: $\underset{\sim}{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{rot} \underset{\sim}{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \times (F_1, F_2, F_3)$$

Věta 20.5. [Stokes]

Nechť P je orientovaná plocha s okrajem Γ

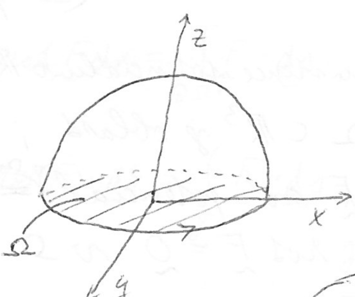
Nechť Γ obíhá P v kladném smyslu

Nechť $\underset{\sim}{F} \in C^1(O)$; kde $O \supset P \cup \Gamma$ je otevřená množina

Potom $\int_P \operatorname{rot} \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{S} = \int_\Gamma \underset{\sim}{F} \cdot ds$

Příklad $P = \{ 0 < z = 4 - x^2 - y^2 \}$

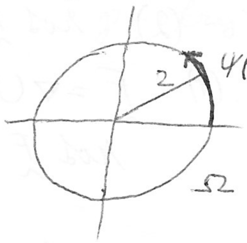
$\underset{\sim}{F} = (2z, 3x, 5y)$



param. P:

$\varphi = (u, v, 4 - u^2 - v^2)$

$(u,v) \in \Omega = \{ x^2 + y^2 < 4 \}$



$\partial_u \varphi = (1, 0, -2u)$

$\partial_v \varphi = (0, 1, -2v)$

$\times \;\; = (2u, 2v, 1)$ ve shodě s obrázkem

$\operatorname{rot} \underset{\sim}{F} = (5, 2, 3)$

$$\int_P \operatorname{rot} \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{S} = \int_\Omega (5,2,3) \cdot (2u, 2v, 1) \, du\, dv$$
$$\underset{0}{\cancel{10u}} + \underset{0}{\cancel{4v}} + 3 \qquad = 3\lambda_2(\Omega) = 3 \cdot 4\pi$$

$$\int_\Gamma \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s} = - \int_0^{2\pi} (0, 6\cos t, 10 \sin t) \cdot (-2\sin t, 2\cos t, 0)\, dt = \underbrace{-12 \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = -12\pi}_{\text{LEVOTOČIVÁ SOUSTAVA}}$$

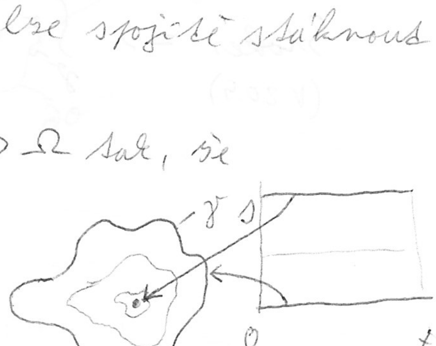
param Γ: $\psi(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0)$; $t \in [0, 2\pi]$

$\psi' = (-2\sin t, 2\cos t, 0)$ NENÍ VE SHODĚ

Def. Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se nazve jednoduše souvislá, pokud každou jednoduchou uzavřenou křivku $\gamma \subset \Omega$ lze spojitě stáhnout do bodu, aniž opustíme Ω.

Tj. $\exists$ spojitá fce $X(s,t) : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ tak, že

- $X(0, \cdot)$ je parametrizace γ
- $X(1, \cdot)$ je konstantní



Názorně: $n=2$: $\gamma \subset \Omega$ uzavř. $\Rightarrow$ „vnitřek" $\gamma \subset \Omega$

$n=3$: $\gamma \subset \Omega$ uzavř. $\Rightarrow \exists$ plocha $P \subset \Omega$, okraj $P = \gamma$

Příkl. $(n=3)$ $B(0;\rho) = \{x^2+y^2+z^2<\rho^2\}$

① $\Omega = B(0,R) \setminus B(0,r)$; $R>r \Rightarrow$ je jednoduše souvislá

② $\Omega = B(0,R) \setminus \underbrace{\{x^2+y^2<r^2\}}_{\text{VÁLEC}} \Rightarrow$ není jednoduše souvislá

Problém: existence potenciálu: $\underset{\sim}{F}: \Omega \to \mathbb{R}^2$; C^1

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ oblast

$\underset{\sim}{F}$ má potenciál $\Rightarrow \operatorname{rot} \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{O}$ (V. 19.3)

$\Leftarrow$ platí pokud navíc Ω je jednoduše souvislá

Věta 20.6 [Existence potenciálu v $\mathbb{R}^3$]

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je oblast; $\underset{\sim}{F}: \Omega \to \mathbb{R}^3$ je C^1, potom:

(1) $\underset{\sim}{F}$ má potenciál v $\Omega \Rightarrow \operatorname{rot} \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{O}$ v Ω

(2) $\operatorname{rot} \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{O}$ v Ω a Ω je jednoduše souvislá $\Rightarrow \underset{\sim}{F}$ má potenciál v Ω

dk. (1) $\underset{\sim}{F} = \nabla U$; tj. $F_i = \partial_i U$

$\operatorname{rot} \underset{\sim}{F} = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_1, \overset{\text{cyklicky}}{\ldots, \ldots})$

$= (\partial_2\partial_3 U - \partial_3\partial_2 U, \ldots, \ldots) = (0,0,0)$

$\hookrightarrow F \in C^1 \Rightarrow U \in C^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \partial_i\partial_j U = \partial_j \partial_i U$

(2) cíl $\underset{\sim}{F}$ má potenciál v Ω

$\Updownarrow$ (V 19.3)

integrál z $\underset{\sim}{F}$ nezávisí v Ω na cestě

$\Updownarrow$

$\gamma \subset \Omega$ jedn. uzavř. křivka $\Rightarrow \int_\gamma \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s} = 0$

$\gamma \subset \Omega$ dána; Ω jedn. souvislá $\to \exists$ plocha $P \subset \Omega$, okraj $P = \gamma$

Stokes (V.20.5) $\Rightarrow \int_\gamma \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s} = \pm \int_P \underbrace{\operatorname{rot} \underset{\sim}{F}}_{=\underset{\sim}{O}} \cdot d\underset{\sim}{S} = 0$

Pozn.: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ oblast, $\underset{\sim}{F}: \Omega \to \mathbb{R}^n$ je C^1

$\underset{\sim}{F}$ má potenciál $\Rightarrow \dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}$; $\forall i \neq j$ // $\dfrac{n(n-1)}{2}$ rovnic

$\Leftarrow$ platí pokud navíc Ω je jednoduše souvislá

$$\left.\begin{array}{l}\bullet \text{ konvexní množina} \\ \bullet \text{ hvězdovitá množina}\end{array}\right\} \text{spec. případy jednoduché souvislosti}$$

DODATKY

$$\int_a^b \frac{dF}{dx}\,dx = F(b) - F(a) \quad \left\{\begin{array}{ll} \text{Gauss:} & \int_{O} \operatorname{div} \underset{\sim}{F}\,dx = \int_{\partial O} \underset{\sim}{F}\cdot\underset{\sim}{n}\,dS, \; O \subset \mathbb{R}^{2,3} \\ \text{Green:} & \int_{\Omega} \operatorname{rot} \underset{\sim}{F}\,dx = \int_{\partial\Omega} \underset{\sim}{F}\cdot\underset{\sim}{ds}\,;\; \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ \text{Stokes:} & \int_P \operatorname{rot} \underset{\sim}{F}\cdot\underset{\sim}{dS} = \int_\gamma \underset{\sim}{F}\cdot\underset{\sim}{ds}\,;\; P\subset\mathbb{R}^3 \text{ plocha} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \gamma \text{ .. okraj } P \end{array}\right\} (*)$$

$o = (a, b)$

$\partial o = \{a\} \cup \{b\}$

$$* \quad \int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega \quad \text{Obecná Stokesova věta}$$

S .. obecná (k-dim.) plocha

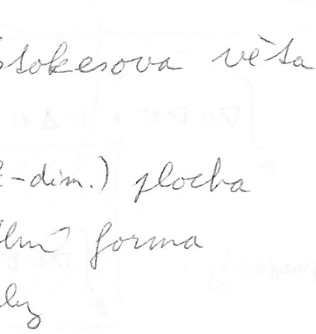
ω .. diferenciální forma

∂S .. okraj plochy

d .. vnější diferenciál

Gauss – Green – Ostrogradský:

$$\int_O \frac{\partial f}{\partial x_j}\,dx = \int_{\partial O} f\,\nu_j\,dS$$



Důsledky: ① $f = F_j$; $j = 1, \dots n$; $\sum_{j=1}^{n}$

$$\int_{O} \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial O} F \cdot \nu \, dS$$: „věta o divergenci"

② $f = u \cdot v$ ... $\frac{\partial}{\partial x_j} f = \frac{\partial u}{\partial x_j} v + u \frac{\partial v}{\partial x_j}$

$$\int_{O} \frac{\partial u}{\partial x_j} v \, dx = \int_{\partial O} u v \nu_j \, dS - \int_{O} u \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx$$ „per partes"

analogie s $\int_a^b u' v = [u v]_a^b - \int_a^b u v'$

③ volme $F = \nabla u$ ve vzorci ①:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \nabla u &= \Delta u \\ \underbrace{\nabla u \cdot \nu}_{\text{derivace ve směru}} &= \frac{\partial u}{\partial \nu} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_{O} \Delta u \, dx = \int_{\partial O} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS$$

④ volme $F = v \cdot \nabla u$; $F_j = v \frac{\partial u}{\partial x_j}$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_j}{\partial x_j} =$$ // ESK: sumační konvence

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(v \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} + v \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$$

$$= \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u$$

$$\int_{O} \nabla u \nabla v + v \Delta u \, dx = \int_{\partial O} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS$$: Green 1 // 1. Greenova formule

symetricky: $$\int_{O} \nabla u \nabla v + u \Delta v \, dx = \int_{\partial O} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, dS$$

odečtením: $$\int_{O} v \Delta u - u \Delta v \, dx = \int_{\partial O} v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, dS$$: Green 2

$$\int_{B(x_0,\delta)} \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial B(x_0,\delta)} F \cdot n \, dS$$; $F \in C^1$ na okolí $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$\to \; / \frac{1}{|B(x_0,\delta)|}$; $\delta \to 0+$

$|B(x_0,\delta)| \to$ míra množiny $B(x_0,\delta)$

$$LS = \underbrace{\frac{1}{|B(x_0,\delta)|} \int_{B(x_0,\delta)} (\operatorname{div} F(x) - \operatorname{div} F(x_0)) \, dx}_{\to 0;\ \delta \to 0+} + \underbrace{\frac{1}{|B(x_0,\delta)|} \int_{B(x_0,\delta)} \operatorname{div} F(x_0) \, dx}_{= \operatorname{div} F(x_0)}$$

$\varepsilon > 0$ dáno: $|\operatorname{div} F(x) - \operatorname{div} F(x_0)| < \varepsilon$ $\forall x \in B(x_0,\delta)$; δ malé

$\Rightarrow$ 1. člen $\leq \frac{1}{|B|} \int_B |\varepsilon| = \varepsilon$

$$\operatorname{div} F(x_0) = \lim_{\delta \to 0+} \frac{1}{|B(x_0,\delta)|} \int_{\partial B(x_0,\delta)} \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{n} \, dS$$

hustota zdrojů

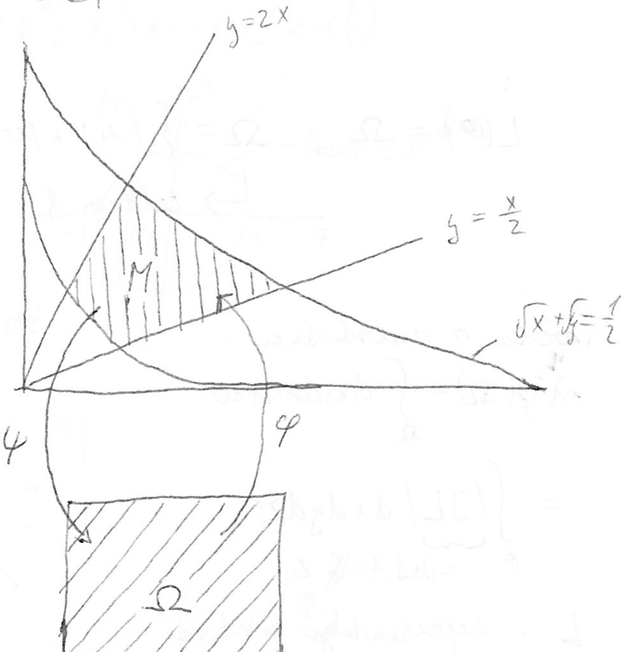
podobně : volme $\underset{\sim}{F} = \nabla u$: $\Delta u(x_0) = \lim_{\delta \to 0+} \frac{1}{|B(x_0,\delta)|} \int_{\partial B(x_0,\delta)} \frac{\partial u}{\partial \underset{\sim}{n}} dS$

z Greenovy věty : $\operatorname{rot} \underset{\sim}{F}(x_0) = \lim_{\delta \to 0+} \frac{1}{|B(x_0,\delta)|} \int_{\partial B(x_0,\delta)} \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s}$

K VĚTĚ O SUBSTITUCI

Př. D2 M: $\frac{1}{3} < \sqrt{x} + \sqrt{y} < \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} < \frac{y}{x} < 2$



$\psi : M \to \Omega = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2}, 2)$

$u = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

$v = y/x$

$\varphi = \psi_{-1}$: $x = \frac{u^2}{(1+\sqrt{v})^2}$, $y = \frac{u^2 v}{(1+\sqrt{v})^2}$

$\lambda_2(M) = \int_M dx\,dy = \int_\Omega |J\varphi| \, du\,dv$

výpočet $J\varphi = \det \nabla\varphi$ $\longrightarrow$ a) přímo

b) trik

trik: $\psi \circ \varphi = Id$

$[(\nabla\psi)\circ\varphi][\nabla\varphi] = \mathbb{1}$

$(J\psi)\circ\varphi \cdot J\varphi = 1$ $\qquad J\varphi = \frac{1}{(J\psi)\circ\varphi}$

$$\nabla\psi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

$$J\psi = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2x^2} = \frac{u}{2\left(\frac{u}{(1+\sqrt{v})^2}\right)^2}$$

$$J\varphi = \frac{2u^3}{(1+\sqrt{v})^4}$$

$$\lambda_2(M) = \int_\Omega \frac{2u^3}{(1+\sqrt{v})^4}\,du\,dv = \int_{\frac12}^{2}\left(\int_{\frac13}^{\frac12} \frac{2u^3}{(1+\sqrt{v})^4}\,du\right) dv = \int_{\frac12}^{2}\frac{dv}{(1+\sqrt{v})^4}\cdot\int_{\frac13}^{\frac12} 2u^3\,du =$$

↳ jen pro obdélník a součin 2 na sobě nezávisejících funkcí

$$= \left| \begin{matrix} \text{substituce} \\ t = 1+\sqrt{v}\end{matrix}\right| = \dots$$

(G2) $\cancel{\int_P x-y}$ $\int_P \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{s}$; $F = (x-y+z,\ y-z+x,\ z-x+y)$

P: vnější strana plochy $\{|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1\}$

$$= \int_\Theta \underbrace{\operatorname{div} \underset{\sim}{F}}_{=3}\, d\lambda_3 \quad ; \quad \Theta = \{ \text{———}\ '' \ \text{———} < 1\}$$

$\rightsquigarrow \lambda_3(\Theta) = ?$

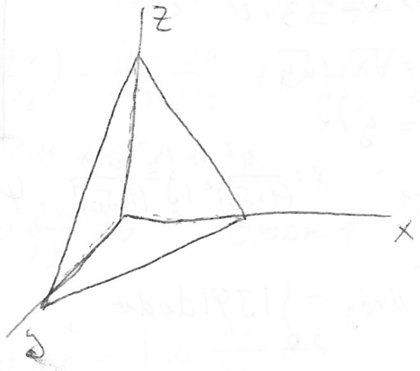
lineární zobrazení $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \to (u,v,w)$

$u = x-y+z$

$\vdots$

$L(\Theta) = \Omega$; $\Omega = \{|u|+|v|+|w|<1\}$

↳ celkem $8\times$ jehlan (symetrie vůči všem oktantům)



věta o substituci:

$$\lambda_3(\Omega) = \int_\Omega du\,dv\,dw =$$

$$= \int_\Theta \underbrace{|JL|}_{=\det A = \cancel{6}\ 4}\, dx\,dy\,dz$$

L .. reprezentuje matici

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

tedy $\lambda_3(\Omega) = \overset{4}{\cancel{6}}\,\lambda_3(\Theta)$

navíc $\lambda_3(\Omega) = 8\cdot\frac13\cdot\frac12\cdot 1$ // jehlan

Tvrzení: $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineární zobrazení reprezentované maticí $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$O \subset \mathbb{R}^n$ měřitelná $\Rightarrow \lambda_n(L(O)) = |\det A|\, \lambda_n(O)$

Příklad: a) $(x, y, z) \to (ax, by, cz)$ ... zvětšuje λ_3 abc-krát

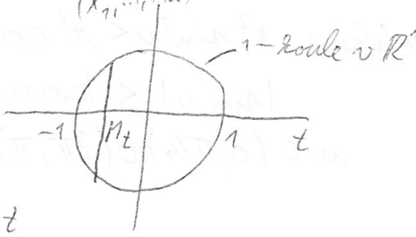
$$A = \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & b & \\ 0 & & c \end{pmatrix}$$

b) $(x_1, \dots, x_n) \to (k x_1, \dots, k x_n)$ ... zvětšuje λ_n k^n-krát

Problém: objem koule v $\mathbb{R}^n$

$$\lambda_n(\{ x \in \mathbb{R}^n;\ x_1^2 + \dots + x_n^2 < r^2 \})$$
$$= r^n \cdot \alpha_n ; \quad \alpha_n = \lambda_n(\{ x \in \mathbb{R}^n;\ x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1 \})$$

rekurentní vztah:



Fubini: $\alpha_{n+1} = \int_{-1}^{1} \left(\int_{M_t} d\lambda_n \right) dt$

$$M_t = \{ x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1 - t^2 \}$$
$$\lambda_n(M_t) = \alpha_n \cdot (1 - t^2)^{\frac{1}{2} \cdot n}$$

$\cancel{M_t}\ \alpha t = \alpha_n \cdot I_n$; $I_n = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{\frac{n}{2}} dt$

rekurentní vztah pro I_n:

$$I_{n+2} = \int_{-1}^{1} \underbrace{1}_{v'=1} \cdot \underbrace{(1 - t^2)^{\frac{n}{2}+1}}_{u} dt \underset{\text{per partes}}{=\!=} \dots$$

$\leadsto$ vztah mezi I_{n+2} a I_n

Shrnutí: $\alpha_{n+1} = \alpha_n \cdot I_n$; $n = 1, 2, \dots$

$I_0 = 2$; $I_1 = \frac{\pi}{2}$; $I_{n+2} = \frac{n+2}{n+3} I_n$

Audiš $a_1 = \lambda_1((-1,1)) = 2$

$\alpha_2 = \alpha_1 I_1 = \pi$

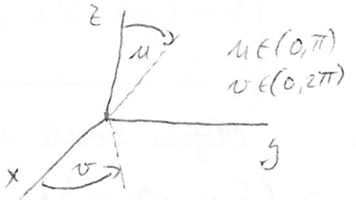
$\alpha_3 = \alpha_2 I_2 = \pi \cdot \frac{2}{3} \cdot I_0 = \frac{4}{3}\pi \qquad I_2 = \frac{2}{3} I_0 = \frac{4}{3}$

$\alpha_4 = \alpha_3 I_3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{3}{8}\pi = \frac{1}{2}\pi^2 \qquad I_3 = \frac{3}{4} I_1 = \frac{3}{8}\pi$

G2 $\displaystyle\int_M \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz$

$$M = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1 \right\} \cap \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < \frac{z^2}{c^2} \right\}$$

zobecněné sférické souřadnice



$x = a \cdot r \cdot \sin u \cos v$

$y = b \cdot r \cdot \sin u \sin v$

$z = c \cdot r \cdot \cos u$

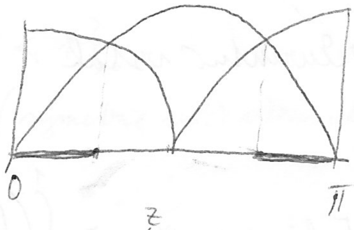
$$J = r^2 \sin u \cdot abc$$

1. podmínka: $r^2 < 1$

2. podmínka: $r^2 \sin^2 u < r^2 \cos^2 u$

$|\sin u| < |\cos u|$

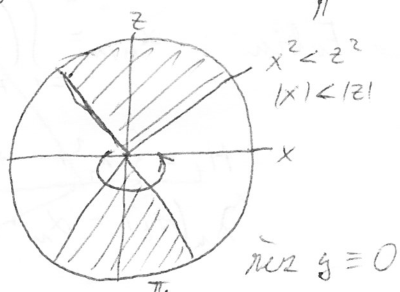
$u \in (0, \pi/4) \cup (\frac{3}{4}\pi, \pi)$



$\varphi: \Omega \to M$; Ω: $r \in (0,1)$

$v \in (0, 2\pi)$

$u \in (0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3}{4}\pi, \pi)$



$$= \int_\Omega r^2 \cdot r^2 \sin u \, abc \, dr\,du\,dv = 2\pi \int_0^1 r^4 dr \cdot 2 \int_0^{\pi/4} \sin u \, du =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{5} \cdot 2 \left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right)$$