1. TERMÍN - 19.1.2010

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. [-b] Je dána posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{1}{1+n|\sin x|}.$$

(a) spočtěte bodovou limitu $f(x)$
(b) rozhodněte, zda $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,\delta]$, pro malé kladné δ
(c) rozhodněte, zda $f_n \rightrightarrows f$ na $[K,+\infty)$, pro velké kladné K
(d) popište všechny intervaly $[a,b]$, na kterých $f_n \rightrightarrows f$; stejnoměrnou konvergenci podrobně dokažte

---

2. [-b] Nalezněte všechny extremály úlohy

$$\Phi[y] = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left[(y')^2 - 6y\sin x\right]\cos^2 x\,dx,$$
$$y(-\pi/3) = y(\pi/3) = 1.$$

Vyšetřete, zda se jedná o (lokální) extrémy.

---

3. [-b] Ukažte, že funkce

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{\exp(-ax)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

je konečná a spojitá v intervalu $a \in (0,\infty)$.
Vypočítejte $\lim_{n\to\infty} F(n^{-1})$.

---

4. [-b] Vypočítejte $\int_P \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, kde

$$\mathbf{F} = \left(\frac{x^2}{a^2}, \frac{y^2}{b^2}, \frac{z^2}{c^2}\right),$$

a P je část válcové plochy, určená podmínkami

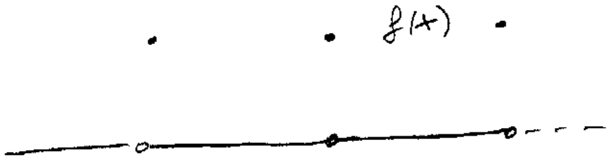
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$
$$\left|z - \frac{x}{a}\right| < d + \frac{y}{b} \qquad (2)$$

orientovaná *ven*. Předpokládejte a, b, $c > 0$ a $d > 1$.

(4)

(a) $\sin x = 0 \iff x = k\pi \Rightarrow f_n(t) = 1\ ;\ \forall n$

$|\sin x| > 0: \quad f_n(t) \to \dfrac{1}{1+\infty|\sin x|} = 0.$

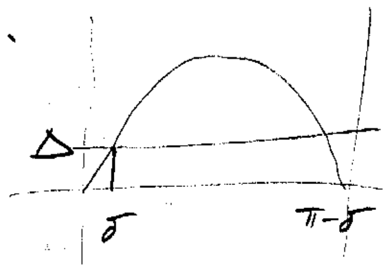


(b) $f_n \not\rightrightarrows f$ na $[0,\delta]$; $\leftarrow$ f_n spojité, f nespojité v $0+$.

(c) $f_n \not\rightrightarrows f$ na $[K,\infty)$ $\leftarrow$ f nespojité v $x = k\pi \in [K,+\infty)$ pro k dost velké.

(d) $f_n \rightrightarrows f$ na $\underbrace{[\delta, \pi-\delta]}_{I}$; obecněji $[k\pi+\delta, (k+1)\pi-\delta]$, $k \in \mathbb{Z}$; $\delta \in (0,\pi)$.

$$\sigma_n = \sup_{x\in} |f_n(t) - \underbrace{f(x)}_{0}| = \sup_{x\in I} \frac{1}{1+n\sin x}$$



(α) přímý odhad: $x \in I: \sin x \ge \sin\delta = \Delta > 0$

$$0 \le \sigma_n \le \frac{1}{1+n\Delta} \to 0\ ;\ n \to +\infty$$

(β) $$\underbrace{\left(\frac{1}{1+n\sin x}\right)'}_{g_n(t)} = \frac{-n\cos x}{(1+n\sin x)^2} \begin{cases} < 0\ ;\ x \in (\delta, \frac{\pi}{2}) \\ > 0\ ;\ x \in (\frac{\pi}{2}, \pi-\delta) \end{cases}$$

$\to$ g_n roste v $[\frac{\pi}{2}, \pi-\delta]$; klesá v $[\delta, \frac{\pi}{2}]$

$$\sigma_n = \max\{g_n(\delta), g_n(\pi-\delta)\} = \frac{1}{1+n\sin\delta}$$

$$\sigma_n \to 0\ ;\ n \to \infty.$$

(2) $f = (r^2 - 6y\sin x)\cos^2 x$; $f_r = 2r\cos^2 x$

$f_y = -6\sin x\cos^2 x$

E.L.: $(-2y'\cos^2 x)' - 6\sin x\cos^2 x = 0$

$(y'\cos^2 x)' + 3\sin x\cos^2 x = 0$

$y'\cos^2 x = \cos^3 x + A$

$y' = \cos x + A\cos^{-2} x$

$y = \sin x + A\,\mathrm{tg}\,x + B$

$1 = y(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + A\sqrt{3} + B$

$1 = y(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ A\sqrt{3} + B$

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

sečtu: $2 = 2B$; $B = 1$

1.ce: $A = -\frac{1}{2}$. $\rightsquigarrow$ $\boxed{y_0 = \sin x - \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,x + 1}$

Jacobi: $f_{rr} = 2\cos^2 x > 0 \rightsquigarrow$? minimum

$f_{yr} = f_{yy} = 0$.

(J) $(2u'\cos^2 x)' = 0$

$u'\cos^2 x = A$

$u' = \frac{A}{\cos^2 x}$

$\boxed{u = A\,\mathrm{tg}\,x + B}$

$u(-\frac{\pi}{3}) = 0$: $A\sqrt{3} + B = 0$

$B = -\sqrt{3}A$

$u = A(\mathrm{tg}\,x - \sqrt{3})$

$u \not\equiv 0 \to A \neq 0$

leč: $u' = \frac{A}{\cos^2 x}$

u ryze monotónní

$\Longrightarrow \nexists$ konjugovaný bod

$\boxed{\text{lokální MINIMUM}}$

③ $F(a) = \int_0^\infty \underbrace{\frac{e^{-ax}}{\sqrt{1+x^2}}}_{f(a,x)}\,dx$

(i) $f(a,\cdot)$ měřitelná v $(0,+\infty)$ ← spojité

(ii) $f(\cdot,x)$ spojité pro $\forall x>0$ pevné.

majoranta: $\sup_{a>0} |f(a,x)| = \sup_{a>0} \frac{e^{-ax}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

není integrovatelné. $\left(\sim \frac{1}{x}\,;\ x\to\infty\right)$.

volme: $I = [\delta,+\infty)$; $\delta>0$ pevné.

$g(x) = \sup_{a\geq\delta} |f(a,x)| = \frac{e^{-\delta x}}{\sqrt{1+x^2}}$;

$g(x) \leq e^{-\delta x} \in L(0,\infty)$. $\to$ $F(a)$ spojité v $[\delta,+\infty)$

$\delta>0$ libovolné

$\to$ spojité v $(0,\infty)$.

$f_n(x) = f\left(\frac{1}{n},x\right) = \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{\sqrt{1+x^2}}$;

rovnoj: $f_n \to f = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; zřejmé: f_n měřitelné (viz výše)

$0 \leq f_n \nearrow f$ $\left(\frac{x}{n}\text{ klesá}\ldots\right)$

Leviho věta: $F(n^{-1}) = \int_0^\infty f_n \to \int_0^\infty f = ?$

(α) pomocí tabulek: $\int_0^\infty f = [\operatorname{argsinh} x]_0^\infty = \infty$

(β) $f\sim\frac{1}{x}$; $x\to\infty$: $f\geq\frac{c}{x}$; $x\geq K$ $\to$ $\int_0^\infty f \geq \int_K^\infty f \geq c\int_K^\infty \frac{1}{x} = +\infty$.

(4) $\varphi: \begin{array}{l} x = a\cos u \\ y = b\sin u \\ z = v \end{array}$: $u \in (0, 2\pi)$. celý válec

2. podm.: $\frac{x}{a} - \left(d + \frac{y}{b}\right) < z < \frac{x}{a} + \left(d + \frac{y}{b}\right)$

$\cos u - d - \sin u < v < \cos u + d + \sin u$

interval délky $2(d + \sin u) > 0$ $\forall u$.

$$\partial_u \varphi = (-a\sin u, b\cos u, 0)$$
$$\partial_v \varphi = (0, 0, 1)$$

$$\partial_u \times \partial_v = (b\cos u, a\sin u, 0) \ldots$$

orientace je ve shodě.

$$\underset{\sim}{F} \circ \varphi = \left(\cos^2 u, \sin^2 u, \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\int_P \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{S} = \int_\Omega (b\cos^3 u + a\sin^3 u)\, du\, dv = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\cos u - d - \sin u}^{\cos u + d + \sin u} \cdots dv \right) du$$

$$= \int_0^{2\pi} (b\cos^3 u + a\sin^3 u) \cdot 2(d + \sin u)\, du$$

$$= \int_0^{2\pi} 2d(\underbrace{b\cos^3 u}_{0} + \underbrace{a\sin^3 u}_{0}) + \underbrace{2b\cos^3 u \sin u}_{0} + \underline{2a\sin^4 u}\, du$$

$$\sin^4 u = (\sin^2 u)^2 = \left(\frac{1}{2}(1 - \cos 2u)\right)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2u + \cos^2 2u)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2u + \left(\frac{1}{2}(1 - \cos 4u)\right)^2\right) = \frac{3}{4} + \cdots$$

$$= 2a \int_0^{2\pi} \sin^4 u\, du = 2a \cdot \frac{3}{4}\pi$$