2. TERMÍN – 22.1.2013

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. **[8b]** Je dána řada funkcí $\sum f_k(x)$, kde

$$f_k(x) = \frac{x^k}{1 + (1 + |x|)^k}$$

Ukažte, že řada konverguje pro každé pevné $x \geq 0$. Rozhodněte (a podrobně zdůvodněte), zda řada konverguje stejnoměrně na následujících intervalech :
(i) $[-1/2, 1/2]$
(ii) $[-K, K]$, kde $K > 1$ je pevné
(iii) $[K, +\infty)$, kde $K > 1$ je pevné

---

2. **[8b]** Nalezněte všechny extremály úlohy

$$\Phi[y] = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left[(y')^2 - 6y\sin x\right] \cos^2 x \, dx,$$
$$y(-\pi/3) = y(\pi/3) = 1.$$

Vyšetřete, zda se jedná o (lokální) extrémy.

---

3. **[9b]** Ukažte, že funkce

$$F(a) = \int_0^1 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) \frac{dx}{x}$$

je konečná pro každé $a \in (0, +\infty)$.
(i) Vypočítejte $\lim_{n\to\infty} F(n^{-1})$.
(ii) Vypočítejte $\lim_{n\to\infty} F(n)$.
(iii) Vypočítejte $F'(a)$ pro každé $a \in (0, +\infty)$.

(Všechny záměny limity a integrálu podrobně odůvodněte.)

---

4. **[7b]** Nechť $P \subset R^3$ je plocha, která vznikne průnikem jednotkové sféry a prvního oktantu, tj.

$$P = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\} \cap \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

Plocha je orientovaná normálou, směřující vzhůru (ve směru osy „z“).
Nechť Γ je zobecněná uzavřená křivka, obíhající „okraj“ P v kladném smyslu. (Nakreslete.)
(i) Pomocí vhodných parametrizací vypočítejte $\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds}$, kde $\boldsymbol{F} = (x, z, y)$
(ii) Vypočítejte $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$. Jak souvisí výsledek s předchozím bodem ?

1. příklad [8b]

[2] ... absolutní konvergence pro každé ,,x‘‘ pevné
[1] ... Weierstrass pro malé argumenty
[3] ... Weierstrass pro omezené argumenty
[2] ... nestejnoměrnost u nekonečna

---

2. příklad [8b]

[2] ... sestavení E.L. rovnice
[2] ... obecné řešení
[1] ... okrajové podmínky -> extremála

[2] ... Jacobiho rovnic & její obecné řešení
[1] ... neex. konj. bod -> závěr: lok. minimum

---

3. příklad [9b]

[1] ... konečnost integrálu (vč. měřitelnosti integrandu)
[2] ... předpoklady Leviho věty
[2] ... předpoklady Lebesgueovy věty

[2] ... derivace formální & její výpočet
[2] ... ověření záměny integrálu a derivace

---

4. příklad [7b]

[1] ... obrázek
[4] ... integrály přes jednotlivé části

[2] ... rotace, komentář

(1) $f_k(x) = \dfrac{x^k}{1+(1+|x|)^k}$;

(0) $|f_k(x)| = \dfrac{|x|^k}{1+(1+|x|)^k} \leq \left(\dfrac{|x|}{1+|x|}\right)^k$;

geometrická řada, kvocient $\dfrac{|x|}{1+|x|} < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \sum f_k(x)$ konv. abs. pro $\forall x$ země

(i) $|f_k(x)| \leq |x|^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$;

konv. abs. stejn. dle Weierstrasse

(ii) $|f_k(x)| \leq \left(\dfrac{|x|}{1+|x|}\right)^k \leq \left(\dfrac{K}{1+K}\right)^k$;

neboť $t \mapsto \dfrac{t}{1+t}$ roste v $[0, \infty)$

nezáp. derivace $\left(\dfrac{t}{t+1}\right)' = \dfrac{-1}{(t+1)^2} > 0$

$\Rightarrow$ konv. abs. stejn., Weierstrass

(iii) NE : není splněna nutná podmínka

$|f_k(x)| \rightrightarrows 0 \quad v \quad [K, +\infty)$.

$\sigma_k = \sup\limits_{x \geq K} |f_k(x)| = \sup\limits_{x \geq K} \left|\dfrac{|x|^k}{1+(1+|x|)^k}\right| \geq \lim\limits_{x \to \infty} \left|\dfrac{|x|^k}{1+(1+|x|)^k}\right|$

$= 1$

tedy $\sigma_k \not\to 0$; $k \to \infty$.

(2) $f = (r^2 - 6y \cdot \sin x) \cos^2 x$

$f_r = 2r \cdot \cos^2 x$

$f_y = -6 \sin x \cdot \cos^2 x$

E.L.: $(\cancel{2} y' \cos^2 x)' + \cancel{6}^{3} \sin x \cdot \cos^2 x = 0$

$$y' \cos^2 x + \cos^3 x = C_1$$

$$y' = \frac{C_1}{\cos^2 x} + \cos x$$

$$y = C_1 \operatorname{tg} x + \sin x + C_2 .$$

---

okr. podm.: $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$$1 = -\sqrt{3} \cdot C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + C_2$$

$$1 = \sqrt{3} \cdot C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + C_2$$

$C_2 = 1$, $C_1 = -\frac{1}{2}$

$$\boxed{y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} x + \sin x + 1}$$

Jacobi: $f_{rr} = 2\cos^2 x > 0$: (? minimum)

$f_{yr} = f_{yy} = 0$.

(J) $(2u' \cos^2 x)' = 0$

$u' \cos^2 x = C_1$

$u = C_1 \operatorname{tg} x + C_2$

okr. podm.: $u(\frac{\pi}{3}) = 0$, u netriviální

$\Rightarrow$ nutně $C_1 \neq 0$

tj. u prostě

$\boxed{\text{tj. } \nexists \text{ konj. bod} \Rightarrow \text{lok. min.}}$

③ $F(a) = \int_0^1 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) \frac{dx}{x}$.

$f(x,a) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \frac{1}{x}$ ... spojité na $x \in (0,1)$
$a \in (0, +\infty)$

... speciálně měřitelné v x.

$|\operatorname{arctg} y| \le |y|$; $\forall y \in \mathbb{R}$ ... klíčový odhad

$\Rightarrow |f(x,a)| \le \left|\frac{x}{a}\right| \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{a} \in \mathcal{L}(0,1)$ $\forall a > 0$ pevné.

(i) $F(n^{-1}) = \int_0^1 f_n(x)\,dx$; $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx) \cdot \frac{1}{x} \nearrow \frac{\pi}{2x}$
$\forall x \in (0,1)$ pevné

Leviho věta: $F(n^{-1}) \to \int_0^1 \frac{\pi}{2x}\,dx = \frac{\pi}{2}\left[\ln x\right]_0^1 = \underline{\underline{+\infty}}$.

(ii) $F(n) = \int_0^1 g_n(x)\,dx$; $g_n(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n}\right)\frac{1}{x} \to 0$
$\forall x \in (0,1)$ pevné.

Lebesgue: $F(n) \to 0$, pokud $\exists$ majoranta, integrovatelná, nezávislá na $\underline{n}$.

opět dle odhadu výše:

$|g_n(x)| \le \frac{x}{n} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{n} \le 1 =: g(x)$.

alternativně: $g_n \rightrightarrows 0$; g_n spojité.

a užiji větu 15.2.

(viii) formální výpočet:

$$F'(a) = \frac{d}{da}\int_0^1 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{a^2}\right)\frac{1}{x}\,dx = -\int_0^1 \frac{dx}{x^2+a^2}$$

$$= \left[-\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\cdot\frac{1}{a}\right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{a}\right).$$

---

ověření záměny $\int$ a $\frac{\partial}{\partial a}$:

omezíme se na interval $I=(\delta,+\infty)$; $\delta>0$ pevné

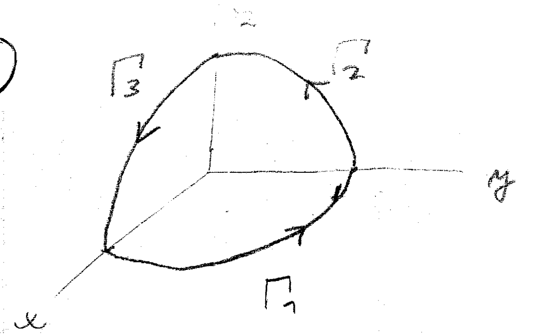
$\exists\, a_0\in I$: $F(a_0)\in\mathbb{R}$ ... již víme

$\exists\, \frac{\partial}{\partial a}f(x,a)\in\mathbb{R}$ $\forall x\in(0,1)$; $\forall a\in I$: o.k.

majoranta: $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| = \frac{1}{x^2+a^2} \le \frac{1}{x^2+\delta^2} \le \frac{1}{\delta^2} =: \underline{\underline{g(x)}}$

(nezávislé na $a\in I$).

4



$$F = (x, z, y)$$

Γ_1: $\varphi = (\cos t, \sin t, 0)$; $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\varphi' = (-\sin t, \cos t, 0)$$

$$F \circ \varphi = (\cos t, 0, \sin t)$$

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot ds = \int_0^{\pi/2} -\sin t \cos t \, dt = \left[\frac{\cos^2 t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Γ_2: $\varphi = (0, \cos t, \sin t)$; $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\varphi' = (0, -\sin t, \cos t)$$

$$F \circ \varphi = (0, \sin t, \cos t):$$

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t - \sin^2 t \, dt = 0 \quad \text{(symetrie)}.$$

Γ_3: $\varphi = (\sin t, 0, \cos t)$; $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\varphi' = (\cos t, 0, -\sin t)$$

$$F \circ \varphi = (\sin t, \cos t, 0)$$

$$\int_{\Gamma_3} F \cdot ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \, dt = \frac{1}{2}.$$

---

celkem: $\int_{\Gamma} F \cdot ds = 0$; leč $\operatorname{rot} F = (0, 0, 0)$;

tj. dle Stokesovy věty: $\int_{\Gamma} F \cdot ds = \int_P \operatorname{rot} F \cdot dS = 0$.