2. TERMÍN – 25.1.2010

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. Je dána řada funkcí

$$\sum_k (-1)^k \sin\left(\frac{\exp(-kx)}{1+\exp(kx)}\right).$$

Ukažte, že řada konverguje (bodově) pro každé pevné $x > 0$.
Rozhodněte, zda konvergence je stejnoměrná, a zda je absolutně stejnoměrná v intervalech (pro pevné konečné a kladné δ):
(a) $(0, \delta)$
(b) (δ, ∞)
(c) $(0, \infty)$
(d) Na jakém největším intervalu je konvergence lokálně (absolutně) stejnoměrná ? Zdůvodněte !

---

2. Nalezněte všechny extremály úlohy

$$\Phi[y] = \int_{-2}^{-1} x^3(y')^2 + 3xy' - \frac{6y}{x}\,dx,$$
$$y(-2) = 1/4, \quad y(-1) = 1.$$

Vyšetřete, zda se jedná o (lokální) extrémy.

Nápomoc: Eulerova rovnice, Ansatz $y = x^\lambda$ pro F.S. a zde – výjimečně – i pro part.ř.

---

3. Nechť
$$f(a,x) = x^{-4} \cdot \ln(1 + ax^2) \cdot \ln(1 + x^2).$$
(a) Ukažte, že funkce $F(a) = \int_0^\infty f(a,x)dx$ je diferencovatelná v $a \in (0, \infty)$.
   – Hodnoty $F(a)$, $F'(a)$ se nesnažte vyčíslit!
(b) Rozveďte do řady $\int_0^1 \sqrt{f(1,x)}dx$.

---

4. Buď $a > 0$. Potom plocha

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$$

určuje právě jednu omezenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.
(a) Popište přesně Ω pomocí sférické parametrizace.
(b) Spočítejte – pomocí této parametrizace – její objem.
(Stačí dojít k jednorozměrnému integrálu a zbavit se gon. fcí.)

① $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sin\left(\frac{e^{-kx}}{1+e^{kx}}\right)$

(a) $I=(0,\delta)$: NE $\quad \left|f_k\left(\frac{1}{k}\right)\right| = \sin\left(\frac{e^{-1}}{1+e}\right) \not\to 0$

$f_k \not\rightrightarrows 0$ (nutná podmínka)

(b) $I=(\delta,\infty)$: ANO: $\quad |\sin y| \le |y| \quad \forall y \in \mathbb{R}$

$$|f_k(x)| = \left|\sin\left(\frac{e^{-kx}}{1+e^{kx}}\right)\right| \le \left|\frac{e^{-kx}}{1+e^{kx}}\right| \le e^{-kx} \le e^{-k\delta}$$

$\sum_k e^{-k\delta}$ konv. $\Rightarrow$ $\sum f_k(x)$ konv. abs. stejn. v (δ,∞)

dle Weierstrassovy věty.

(c) $I=(0,\infty)$: NE – viz (a)

---

bodová konvergence plyne

hned z Leibnize $\quad \frac{e^{-kx}}{1+e^{kx}} = \frac{1}{e^{kx}} \cdot \frac{1}{1+e^{kx}} \searrow 0$

(klesá $\forall x>0$ pevné)

$\sin y$ roste pro $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\longrightarrow \quad \sin\left(\frac{e^{-kx}}{1+e^{kx}}\right) \searrow 0 \quad$ (klesá $\forall x>0$)

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konv. pro $\forall x>0$.

(2) $f = x^3 r^2 + 3xr - \frac{6y}{t}$

$f_r = 2x^3 r + 3x$ E.L. $-(2x^3y' + 3x)' - \frac{6}{t} = 0$

$f_y = -\frac{6}{x}$

$$(2x^3y')' + (3x)' + \frac{6}{t} = 0$$

$$2x^3y'' + 6x^2y' + 3 + \frac{6}{t} = 0 \quad \Big/ : 2x$$

$$x^2y'' + 3xy' = -\frac{3}{2x} - \frac{3}{x^2}$$

Eulerova rce:

(i) homogenní úloha $x^2y'' + 3xy' = 0$

Ansatz: $y = x^\lambda$ $\lambda(\lambda-1) + 3\lambda = 0$

$\lambda(\lambda+2) = 0$;

$\lambda = 0, -2$: F.S. $\{\underset{}{\overset{x^0}{\overset{\shortparallel}{1}}}, x^{-2}\}$.

(ii) $f_1(t) = -\frac{3}{2}x^{-1}$

$$\left.\begin{aligned} \rightarrow y_{p1} &= Ax^{-1}: \\ y'_{p1} &= -Ax^{-2} \\ y''_{p1} &= 2Ax^{-3} \end{aligned}\right\} \quad 2A - 3A = -\frac{3}{2}$$

$A = \frac{3}{2}$ ✓ $y_{p1} = \frac{3}{2}x^{-1}$

(iii) $f_2(x) = -\frac{3}{x^2}$:

$y_{p2} = Ax^{-2}\ln|x|$

$y'_{p2} = \cancel{-2Ax^{-3}\ln|x|} + Ax^{-3}$

$y''_{p2} = 6Ax^{-4}\ln|x| - 2Ax^{-4} - 3Ax^{-4} = \cancel{6Ax^{-4}\ln|x|} - 5Ax^{-4}$

$$-5A + 3A = -3$$

$$A = +\frac{3}{2}$$

$y_{p2} = \frac{3}{2}x^{-2}\ln|x|$.

obecné řešení: $y_0 = A + \frac{B}{x^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{\ln|x|}{x^2}\right)$.

$y_0(-2) = \frac{1}{4}$: $A + B\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{4}\right) = \frac{1}{4}$

$y_0(-1) = 1$: $A + B + \frac{3}{2}(-1) = 1$

$\longrightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}(1-\ln 2);\ B = \frac{1}{2}(4+\ln 2)}$

Pozn.: Omlouvám se za nepřesnou „nápomoc" – malý překlep v zadání, který ztížil nalezení y_p. (Nemělo by být bodováno.)

? (lokální) extrém: Jacobiho věta (ale nezávisí na y_0)

$P = f_{zz} = 2x^3 < 0$ v $[-2,-1]$ $\longrightarrow$ podezření na maximum.

$Q = f_{yy} - (f_{zy})' = 0$.

(J) $(2x^3 u')' = 0$

$2x^3 u' = A$

$u' = \frac{A}{2x^3}$

$\longrightarrow$ $u' \equiv 0$ nebo u ryze monotónní
$(A=0)$ $(A \neq 0;\ x^3 < 0)$

$\longrightarrow$ $u(0) = 0$; u netriviální $\Rightarrow A \neq 0$

$u(x) \neq 0\ \forall x \in (-2,-1]$

$\nexists$ konj. bod $\longrightarrow$ nalezené extremále je lokální maximum.

(3a) (i) $f(a,\cdot)$ spojité $\to$ měřitelné v $(0,+\infty)$

(ii) $$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\ln(1+x^2)}{(1+ax^2)x^2} \quad \forall a>0;\ x>0.$$

(iii) <u>majoranta</u>: $$\sup_{a>0} \left|\frac{\partial f}{\partial a}(a,x)\right| = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} =: g(x).$$

?? $\int_0^\infty g\,dx < \infty$: rozdělíme: $$\int_0^\infty g = \int_0^\delta + \int_\delta^K + \int_K^\infty = I_1 + I_2 + I_3.$$

v $0+$: $g(x) \sim 1 \to I_1$ konv.

I_2: $\left.\begin{array}{l}\text{spojité na om.}\\ \text{uzav. int.}\end{array}\right\} \to I_2$ konv.

I_3: $$\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \frac{\ln(1+x^2)}{x^{1/2}}\, x^{-3/2}; \quad \int_K^\infty x^{-3/2}\,dx < \infty$$

≤ 1 pro $x \ge K$ velké; neboť $\frac{\ln(1+x^2)}{x^{1/2}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.

(iv) $a=0$: $f(0,\cdot) \equiv \overset{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2(1+x^2)}}{0} \in \mathcal{L}(0,\infty)$.

$$\longrightarrow F'(a) = \int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{(1+ax^2)x^2}\,dx; \quad \forall a>0.$$

(3b) $$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{(x^2)^{k+1}}{k+1} = \int_0^1 \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{x^{2k}}{k+1}$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^\infty \int_0^1 (-1)^k \frac{x^{2k}}{k+1}$$

<u>ověření (*)</u>: Lebesgueova věta:

$$\left|\sum_{k=0}^n (-1)^k g_k(x)\right| \le g_0(x) \quad \forall n, \forall x.$$

$$= \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{1}{(k+1)(2k+1)}.$$

„Leibnizovské sumy" $g_0(x) = 1 \in \mathcal{L}(0,1)$

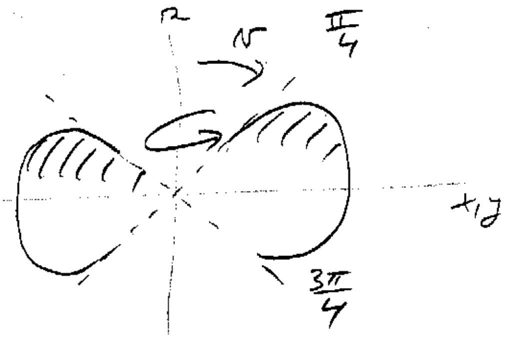
$g_k(x) \ge g_{k+1}(x) \ge \dots 0.$

(4)

$x = r\cos u \sin v$

$y = r \sin u \sin v \qquad J = r^2 \sin v$

$z = r\cos v$



$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2\left(x^2+y^2-z^2\right)$$

$$r^2 = a^2\left(\sin^2 v - \cos^2 v\right) \underline{\underline{> 0}}$$

polární zápis:

$$\Omega : \begin{cases} u \in (0, 2\pi) \\ v \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \\ r \in (0, R(v)) \ ; \quad R(v) = a\left(\sin^2 v - \cos^2 v\right)^{1/2}. \end{cases}$$

$$V = \int_\Omega r^2 \sin v \, du\, dv\, dr = \int_0^{2\pi}\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\int_0^{R(v)} r^2 \sin v \, dr\right) dv\right) du$$

$$= 2\pi \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{R(v)} \sin v \, dv = \frac{2\pi}{3} a^3 \cdot \underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\sin^2 v - \cos^2 v\right)^{3/2} \sin v \, dv}_{I}$$

$$I = \left| \begin{array}{l} \cos v = t \\ t \in \left(+\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right) \\ \sin^2 v = 1 - t^2 \\ dt = -\sin v \, dv \end{array} \right| = \int_{-1/\sqrt2}^{1/\sqrt2} \left(1-2t^2\right)^{3/2} dt \overset{*)}{=} \frac{3\pi}{8\sqrt2}.$$

*) subst: $t = \frac{1}{\sqrt2} \sin x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\longrightarrow \frac{1}{\sqrt2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx$;

$$\cos^4 x = \left(\frac12 (1 + \cos 2x)\right)^2$$

$$= \frac18 \left(\cos 4x + 4\cos 2x + 3\right)$$