3. TERMÍN – 29.1.2013

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte.

Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. [**8b**] Je dána posloupnost funkcí

$$f_n(x) = x \ln\left(\frac{n + x^n}{2n + x^n}\right)$$

(i) vypočítejte bodovou limitu $f(x)$ pro každé $x \geq 0$ pevné
Nechť $0 < \delta \leq 1 < K + \infty$. Rozhodněte (a podrobně zdůvodněte), zda $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$
(ii) na intervalu $[0, \delta]$
(iii) na intervalu $[\delta, K]$

---

2. [**7b**] Nalezněte všechny extremály úlohy

$$\Phi[y] = \int_1^e \left[\frac{x}{2}(y')^2 + \frac{2yy'}{x} - \frac{y^2}{x^2}\right] dx,$$
$$y(1) = 1, \quad y(e) = 2.$$

Vyšetřete, zda se jedná o (lokální) extrémy.

---

3. [**8b**] Je dán integrál

$$I(a) = \int_0^\infty \exp(-ax)\cosh x \, dx, \qquad a > 0.$$

(i) Pomocí Taylorova rozvoje pro $\cosh x$ rozveďte integrál do řady. Ověřte podrobně předpoklady záměny sumy a integrálu. *Nápomoc:* $\int_0^\infty x^m \exp(-x)dx = m!$
(ii) Řadu z předchozího bodu sečtěte. Integrál vypočtěte přímo a výsledky porovnejte.

---

4. [**9b**] Nechť $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ je zadána podmínkami (pro pevné $a > 0$)

$$(x^2 + y^2)^2 < 8a^2xy$$
$$0 < x, \quad 0 < y$$
$$0 < z < 1$$

(i) Ukažte, že $P = \partial\mathcal{O}$ je zobecněná plocha; tj. nalezněte přípustný rozklad a příslušné parametrizace (hodnost gradientu není nutno ověřovat); načrtněte
(ii) Uvažujte integrál $\int_P \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS}$, kde $\boldsymbol{F} = (x - y, 2y + x, x + y - 2z)$ a P je orientována normálou, směřující *ven* z $\mathcal{O}$. Modifikujte $\boldsymbol{F}$ tak, aby integrál zůstal stejný (podrobně zdůvodněte), avšak snáze se počítal; integrál vypočtěte.

1. příklad [8b]

[3] ... bodová limita
[3] ... stejnoměrnost na [0,1]
[2] ... nestejnoměrnost na [1,K]

---

2. příklad [7b]

[2] ... sestavení E.L. rovnice
[1.5] ... obecné řešení
[0.5] ... okrajové podmínky -> extremála

[2] ... Jacobiho rovnice & její obecné řešení
[1] ... neex. konj. bod -> závěr: lok. minimum

---

3. příklad [8b]

[3.5] ... rozvoj do řady, integrace člen po členu
[2] ... předpoklady Leviho věty

[2.5] ... integrace včetně správného ošetření ,,nekonečen‘‘

---

4. příklad [9b]

[1] ... obrázek
[3] ... rozklady a jejich parametrizace
[2] ... zjednodušení F se správným odůvodněním
[3] ... výpočet (-0.5 za každou menší numerickou chybu)

① $f_n(x) = x \cdot \ln\left(\frac{n+x^n}{2n+x^n}\right)$; $x \ge 0$.

(i) $x \in [0,1]$: $x^n \to 0$ nebo 1; tedy $\frac{n+x^n}{2n+x^n} = \frac{1+\frac{x^n}{n}}{2+\frac{x^n}{n}} \to \frac{1}{2}$

$x > 1$: $\frac{n}{x^n} \to 0$, tedy $\frac{n+x^n}{2n+x^n} = \frac{n/x^n+1}{2n/x^n+1} \to 1$.

celkem: $f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} x \cdot \ln\frac{1}{2}; & x \in [0,1] \\ 0; & x > 1. \end{cases}$

(i) ANO; dokonce $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na $[0,1]$; neboť

$\sigma_n = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup \left| x \cdot \ln\left(\frac{2n+2x^n}{2n+x^n}\right)\right|$

užiji odhad $\ln(1+y) \le y$; $\forall y > 0$.

$\le \sup \left| x \cdot \frac{x^n}{2n+x^n} \right| \le \frac{1}{2n}$; tedy $\sigma_n \to 0$.

(ii) NE: $f(x)$ nespojitá, $f_n(x)$ spojité na $[1, K]$; $K > 1$.

(2) $f = \frac{z^2}{2}x + \frac{2yz}{x} - \frac{y^2}{x^2}$; $[e^0, e^1]$ $y(1)=1$
$y(e)=2$

$f_z = zx + \frac{2y}{x}$; $f_y = \frac{2z}{x} - \frac{2y}{x^2}$

E.L.: $-\left(y'x + \frac{2y}{x}\right)' + \frac{2y'}{x} - \frac{2y}{x^2} = 0$ $\left(\frac{2y}{x}\right)'$

$(y'x)' = 0$

$y'x = A$

$y' = \frac{A}{x}$; $\boxed{y = A\ln x + B}$

okr. podm.: $A\ln 1 + B = 1$: $B = 1$
$A\cdot\ln e + B = 2$: $A = 1$. $\boxed{y = \ln x + 1}$

jediná extremála

$f_{zz} = x > 0$ na $[1, e]$ $\Rightarrow$? (lok.) minimum ?

$f_{yz} = \frac{2}{x}$, $f_{yy} = -\frac{2}{x^2}$; z. $P(x) = x$
$Q(x) = -\frac{2}{x^2} - \left(\frac{2}{x}\right)' = 0$

(J) $(xu')' = 0$

výpočet výše: $u = C\ln x + D$
$u(1) = 0 \Rightarrow D = 0$;
u .. netriviální $\Rightarrow C \neq 0$
$\Rightarrow \nexists$ konj. bod. $\Rightarrow$ $\boxed{\text{nalezená extremála je ostré lok. min.}}$

③ $I(a) = \int_0^\infty e^{-ax} \cosh x \, dx \quad ; a>0$

(i) $\cosh x = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k}}{2k!} ; \ \forall x>0$; tedy $I(a) = \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty f_k(t)$,

kde $f_k(t) = \frac{1}{2k!} x^{2k} e^{-ax}$; $f_k \geq 0$, měřitelné (spojité)

Leviho věta: $I(a) = \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty f_k(t) dx = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{a^{2k+1}}$;

pomocí vzorečku: $\int_0^\infty x^m e^{-ax} dx = \frac{m!}{a^{m+1}}$; $\forall a>0$.

(ii) $I(a) = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{1}{a^2}\right)^k \ldots$ geometrická řada

$q = \frac{1}{a^2}$

$a \leq 1 \ (q \geq 1)$: $I(a) = +\infty$

$a > 1$: $I(a) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{a^2}} = \frac{a}{a^2-1}$

---

přímý výpočet: $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$I(a) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{(1-a)x} + e^{-(1+a)x} dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{(1-a)x} dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-(1+a)x} dx$

$= I_1(a) + I_2(a)$; mají-li P.S. smysl

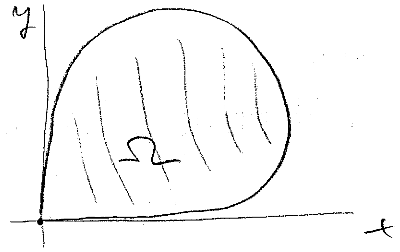
$2 \cdot I_1(a) = \begin{cases} +\infty ; & a \leq 1 \\ \frac{1}{a-1} ; & a>1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ má smysl vždy;

$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1} = \frac{2a}{a^2-1}$ ✓

$2 \cdot I_2(a) = \frac{1}{a+1}$; $\forall a>0$

④ $(x^2+y^2)^2 < 8a^2xy$

$x>0,\ y>0$



$\Omega \subset \mathbb{R}^2$: $x = r\cos u$, $y = r\sin u$

$\left.\begin{array}{l} u \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ r \in (0, 2a\sqrt{\sin 2u}) \end{array}\right\} \Pi$

$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, kde

$P_1 = \Omega \times \{R=0\}$ „podstava"

$P_2 = \Omega \times \{R=1\}$ „horní podstava"

$P_3 = \partial\Omega \times \{R \in (0,1)\}$ „plášť boční"

γ_1, γ_2: okraje P_1, P_2; γ_3: $\{x=y=0\} \times \{R \in \langle 0,1\rangle\}$

Gaussova věta: $\int_P \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{S} = \int_\Theta \operatorname{div} \underset{\sim}{F}\, d\lambda_3$;

kde $\operatorname{div} \underset{\sim}{F} = 1$; volme jiné vektorové pole; např. $\underset{\sim}{G} = (0,0,R)$

$\Rightarrow \int_{P_3} = 0$; $(n \perp \underset{\sim}{G})$; $\int_{P_1} = 0$ $(\underset{\sim}{G} = 0$ na $P_1)$

tedy zůstává $\int_{P_2} \underset{\sim}{G} \cdot d\underset{\sim}{S} = \int_{P_2} dS = \lambda_2(\Omega)$,

neboť $\underset{\sim}{n} = \underset{\sim}{G} = (0,0,1)$ na P_2.

$\lambda_2(\Omega) = \int_\Pi r\, dr\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a\sqrt{\sin 2u}} r\, dr \right) du = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4a^2 \sin 2u\, du = \boxed{2a^2}$