3. termín 2.2.2010

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. Je dána posloupnost funkcí

$$f_k(x) = \cos\left(\frac{3k\pi}{2}\right) \operatorname{arctg} \sin\left(\frac{1}{kx}\right).$$

(a) Rozhodněte, zda $f_k \rightrightarrows 0$ v $(0,\delta)$, respektive (δ,∞).
(b) Rozhodněte, zda $\sum_k f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v intervalech $(0,\delta)$, respektive (δ,∞).
(c) Rozhodněte, zda řada konverguje absolutně stejnoměrně v některém z těchto intervalů.

---

2. Nalezněte všechny extremály úlohy

$$\Phi[y] = \int_{-2}^{-1} x^3(y')^2 + 3xy^2 - \frac{6y}{x}\,dx,$$
$$y(-2) = 1/4, \quad y(-1) = 1.$$

Vyšetřete, zda se jedná o (lokální) extrémy.

Nápomoc: Eulerova rovnice, Ansatz $y = x^\lambda$ pro F.S. a zde – výjimečně – i pro part.ř.

---

3. Vyšetřete průběh funkce

$$F(a) = \int_0^\infty \left(\frac{1-\exp(-ax)}{x+\sqrt{x}}\right)^2 dx;$$

to jest:
(a) Ukažte, že funkce je diferencovatelná v $a \in (0,\infty)$ a vyšetřete znaménko $F'(a)$
(b) Vypočtěte $\lim_{n\to\infty} F(n)$.
(c) Vypočtěte $\lim_{n\to\infty} F(1/n)$.

---

4. Nalezněte vhodnou parametrizaci neomezené kuželové plochy

$$P_\infty = \{z + 2\sqrt{x^2+y^2} = 0\}.$$

Spočítejte integrál prvního druhu

$$\int_P \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

kde P je průnik s poloprostorem

$$P = P_\infty \cap \{z + 1 > \frac{x+y}{\sqrt{2}}\}.$$

1. příklad [9b]

(a) [2+2]

(b) [1+2]

(c) [2]

---

2. příklad [7b]

[2] ... sestavení E.L. rovnice
[1] ... obecné řešení
[1] ... okrajové podmínky -> extremála

[2] ... sestavení Jacobiho rovnice,
[1] ... neex. konj. bod -> závěr: lok. maximum

---

3. příklad [9b]

(a)
[1] ... měřitelnost vůči 'x' & diferencovatelnost vůči 'a'
[3] ... majoranta: + ověření integrovatelnosti
[2] ... integrovatelnost f(1,x)

(b) [1.5]
(c) [1.5]

---

4. příklad [7b]

[2] ... parametrizace + Jakobián
[1] ... správné určení mezí r, theta

[2] ... dosazení + aplikace Fubiniho
[2] ... dopočet posledního 1d integrálu

① $f_k(x) = \cos\left(\frac{3k\pi}{2}\right) \operatorname{arctg} \sin\left(\frac{1}{kx}\right)$; $x>0$

(a) $I = (0,\delta)$: NE

$$\sigma_k = \sup_{x\in I} |f_k(x)| \geq \left|f_k\left(\tfrac{1}{k}\right)\right| = \left|\cos\left(\tfrac{3k\pi}{2}\right)\right| \cdot \operatorname{arctg} \sin 1$$

neboť $x = \frac{1}{k} \in (0,\delta)$ pro k velké

$$\cos\left(\frac{3k\pi}{2}\right) = 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ \dots \not\to 0.$$
$$k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

$I = (\delta,\infty)$: ANO

$$\sigma_k = \sup_{x\in I} |f_k(x)| = \sup_{x>\delta} \underbrace{\left|\cos\left(\frac{3k\pi}{2}\right)\right|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\left|\operatorname{arctg}\left(\sin\frac{1}{kx}\right)\right|}_{\leq \frac{1}{kx}} \leq \frac{1}{k\delta}$$

neboť $|\sin y| \leq |y|$
$|\operatorname{arctg} y| \leq |y|$ $\forall y\in\mathbb{R}$.

celkem: $0 \leq \sigma_k \leq \frac{1}{\delta}\cdot\frac{1}{k} \to 0$.

(b) $I = (0,\delta)$: NE; není splněna nutná podmínka stejn. konv. řady (viz (a))

$I = (\delta,\infty)$: ANO – Dirichletovo kritérium.

$\sum_k \cos\left(\frac{3k\pi}{2}\right)$ má stejn. omezené částečné součty.

$g_k(x) := \operatorname{arctg}\left(\sin\frac{1}{kx}\right)$.

je třeba ověřit: • $g_k \rightrightarrows 0$ v (δ, ∞) — již víme, viz (a)

• $\{g_k(x)\}_k$ je **monotónní** $\forall x \in (\delta, \infty)$

$k \geq k_0$ nezávisí na x.

---

ověření monotonie: $\quad \operatorname{arctg}(y)$ je monotónní v $\mathbb{R}$

$\frac{1}{kx}$ klesá $\forall x > 0$ pevné

$\sin y$ je monotónní pro $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

---

volme $k_0 \in \mathbb{N}$; $\quad \frac{1}{k_0 \delta} < \frac{\pi}{2} \iff k_0 > \frac{2}{\pi \delta}$.

pak $\quad 0 < \frac{1}{kx} < \frac{1}{k_0 \delta} \quad \forall x \in (\delta, \infty), \ k \geq k_0$

tedy $\frac{1}{kx} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \{g_k(x)\}$ **klesá**.

(c) NE: neboť $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| = +\infty \quad \forall x > 0$ pevné.

Dk: $\quad \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left|\cos\left(\frac{3k\pi}{2}\right)\right|}_{= \begin{cases} 0; & k \text{ liché} \\ 1 & \text{sudé} \end{cases}} \cdot \left|\operatorname{arctg} \sin \frac{1}{kx}\right|$

$= \sum_{l=1}^{\infty} \left|\operatorname{arctg} \sin \frac{1}{2lx}\right|$; $\quad \sin y \sim y, \ \operatorname{arctg} y \sim y \quad y \to 0$

konv. $\iff$ konv. řada $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2lx} = \frac{1}{2x} \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} = +\infty$.

(2) $\Phi(y) = \int_{-2}^{-1} x^3 (y')^2 + 3xy^2 - \frac{6y}{x}\, dx$; $y(-2) = \frac{1}{4}$, $y(-1) = 1$

E.L.:

$f = x^3 r^2 + 3xy^2 - \frac{6y}{x}$

$f_r = 2x^3 r$

$f_y = 6xy - \frac{6}{x}$.

$$(-2x^3 y')' + 6xy - \frac{6}{x} = 0$$

$$x^2 y'' + 3xy' - 3y = -\frac{3}{x^2}$$

Eulerova rce: $y = x^\lambda \rightsquigarrow \lambda(\lambda-1) + 3\lambda - 3 = 0$

$(\lambda+3)(\lambda-1) = 0$

F.S. $\{x^{-3}, x\}$

Ansatz: (nápověda)

$y_p = cx^{-2}$:

$y_p' = -2cx^{-3}$

$y_p'' = 6cx^{-4}$

$6cx^{-2} - 6cx^{-2} - 3cx^{-2} = \frac{-3}{x^2}$

$\boxed{c = 1}$

---

obecné řešení: $y_o = a \cdot x^{-3} + bx + x^{-2}$

$\left.\begin{array}{l} y(-2) = \frac{1}{4} \\ y(-1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = b = 0$

$\boxed{y = x^{-2}}$

jediná extremála

Jacobi: $P = 2x^3 < 0$: ? lok. max.

$Q = 6x$

(J) $(2x^3 u')' - 6xu = 0$

$x^2 u'' + 3xu' - 3u = 0$

$u = \alpha x^{-3} + \beta x$

? $\exists$ konj. bod:

$u = \underbrace{x^{-3}}_{\neq 0} \underbrace{(\alpha + \beta x^4)}_{\text{monotónní v } [-2,-1]}$.

$\Rightarrow \nexists$ konj. bod

$\rightarrow$ lok. max.

③ $f(a,x) = \left(\frac{1-e^{-ax}}{x+\sqrt{x}}\right)^2$; $I = (0,\infty)$

$J = (0,\infty)$

(i) $f(a,\cdot)$ měřitelná ← spojitá v I $\forall a>0$ zřejmě

(ii) $\frac{\partial f}{\partial a} = 2\left(\frac{1-e^{-ax}}{x+\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{xe^{-ax}}{x+\sqrt{x}}$ ∃ vlastní $\forall x, a \in (0,\infty)$

(iii) majoranta: $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| = \underbrace{\frac{2x}{(x+\sqrt{x})^2}}_{\leq 2}\cdot\underbrace{(1-e^{-ax})}_{\leq 1}\cdot e^{-ax}$

omezíme se na

$a \in (\delta, +\infty) =: \tilde{J}$; $\sup_{a\in\tilde{J}} \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \leq 2e^{-\delta x} \in L(0,\infty)$

→ $F(a)$ je diferencovatelná v $(\delta, +\infty)$

$\delta>0$ libovolné – složí v $(0,\infty)$.

(iv) ∃ $a_0 \in (\delta, +\infty)$; $F(a_0,\cdot) \in L(0,\infty)$

BÚNO: $\delta < 1 =: \underline{a_0}$. $\underbrace{\left(\frac{1-e^{-x}}{x+\sqrt{x}}\right)^2}_{=:g(x)} \in L^1(0,\infty)$.

$\int_0^\infty = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^\infty$.

$\frac{1-e^{-x}}{x+\sqrt{x}}$ $\underset{0/0}{\text{l'Hosp.}}$ – $\frac{e^{-x}}{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}} \to \frac{1}{\infty} = 0$; $x\to 0+$

→ $\int_0^\varepsilon g < \infty$ pro $\varepsilon>0$ dost malé.

naopak $g(x) \leq \left(\frac{1}{x}\right)^2 \in L(\varepsilon,\infty)$. O.K.

celkem: $F'(a) = 2\int_0^\infty \underbrace{\frac{x}{x+\sqrt{x}}\cdot(1-e^{-ax})\cdot e^{-ax}}_{>0}\,dx \;\underline{> 0.}$

$F(\cdot)$ rostoucí v $(0,\infty)$.

(b) $$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \underbrace{\left(\frac{1-e^{-nx}}{x+\sqrt{x}}\right)^2}_{f_n(x)} dx \overset{(*)}{=} \int_0^\infty \underbrace{\frac{dx}{(x+\sqrt{x})^2}}_{f(x)} = I.$$

$I = +\infty$; neboť $f(x) \sim \frac{1}{x}$; $x \to 0+$: $\int_0^\delta \frac{dx}{x} = +\infty$.

ověření řádové rovnosti: $$\frac{x}{(x+\sqrt{x})^2} = \left(\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)^2 \to 1$$ $x \to 0+$. $\quad \sqrt{x} \to 0$.

Pozn.: I lze spočítat i přímo; substitucí $\sqrt{x} = y$

Ověření (*): Leviho věta: $0 \le f_n \le f_{n+1}$. $\forall n$

(c) $$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \left(\frac{1-e^{-\frac{x}{n}}}{x+\sqrt{x}}\right)^2 dx \overset{(*)}{=} 0$$; neboť $f_n \to 0$

ověření (*): Lebesgueovo věta: $|f_n(x)| \le |f_1(x)| = \left(\frac{1-e^{-x}}{x+\sqrt{x}}\right)^2$

integrovatelnost ověřena již dříve.

④ $z = -2\sqrt{x^2+y^2}$;

$\varphi(u,v) = (u, v, -2\sqrt{u^2+v^2})$; $u,v \in \Omega_\infty = \mathbb{R}^2$.

$z > -1 + \frac{x+y}{\sqrt{2}}$; polární souřadnice:

$x = r\cos\theta \quad (=u)$

$y = r\sin\theta \quad (=v)$

$-2r > -1 + \frac{r}{\sqrt{2}}(\cos\theta + \sin\theta)$

$1 > r\left(2 + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right)$;

---

tj.: $\psi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, -2r)$

$$\left.\begin{array}{l}\theta \in (0, 2\pi) \\ r \in \left(0, \frac{1}{2+\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}\right).\end{array}\right\} \Omega$$

$\partial_r\psi = (\cos\theta, \sin\theta, -2)$

$\partial_\theta\psi = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$

$\partial_r\psi \times \partial_\theta\psi = (+2r\cos\theta, 2r\sin\theta, r)$

$\|\partial_r\psi \times \partial_\theta\psi\|^2 = 4\cdot(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta) + r^2 = 5r^2$

$$\int_P \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iint_\Omega \frac{\sqrt{5}\cdot r}{r}\, dr\, d\theta = \sqrt{5}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{2+\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}} dr\right) d\theta$$

$$= \sqrt{5}\, \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}}_{I} = 2\pi\sqrt{\frac{5}{3}}$$

postačí spočíst: $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t}$; standardní substituce

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2} = y$$

$$dt = \frac{2}{1+y^2}\,dy$$

$$\sin t = \frac{2y}{1+t^2}$$

$$= \int_{\infty}^{\infty} \frac{1}{2+\frac{2y}{1+y^2}} \cdot \frac{2}{1+y^2}\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1+y+y^2} = \dots \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$