7. TERMÍN – 15.9.2010

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. Je dána posloupnost funkcí

$$f_k(x) = \sin\left(\frac{\sin^k(x)}{2+\sin^k(x)}\right).$$

1 (a) Najděte *bodovou* limitu $f(x)$ pro všechna $x \in [0, 2\pi]$.

4 (b) Rozhodněte (podrobně zdůvodněte), zda $f_k \rightrightarrows f$ v intervalech $[0,\delta]$ resp. $[\pi-\delta, \pi+\delta]$, kde $\delta \in (0,\pi)$ je pevné.

3 (c) Existuje $\delta > 0$ takové, že řada $\sum_k (-1)^k \big[f_k(x) - f(x)\big]$ stejnoměrně konverguje v intervalu $[0,\delta]$? Odpověď řádně zdůvodněte.

---

2. Nalezněte všechny extremály úlohy ~~3~~ 4

$$\Phi[y] = \int_1^2 x(y')^2 + yy' + xy\,dx$$
$$y(1) = 1/8, \quad y(2) = 1/2 - \ln 2.$$

Vyšetřete, zda se jedná o (lokální) extrémy. 3

---

3. Nechť 10

$$f(a,x) = \frac{\exp(-ax) - (1+x)^{-1}}{\sqrt{x^3}}.$$

3 (a) Najděte maximální interval I hodnot a takový, že $\int_0^\infty f(a,x)\,dx$ konverguje.

4 (b) Dokažte, že funkce $F(a) = \int_0^\infty f(a,x)\,dx$ je diferencovatelná v I.

3 (c) Vypočítejte $\lim_{n\to\infty}\big\{-F(n)\big\}$.

---

7 **4.** Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je dána vztahy

$$\{x^2+y^2+z^2<4\} \cap \{3z > x^2+y^2\}$$

obrázek

1 (a) Nakreslete oblast Ω (jde o rotační těleso). Nalezněte její vhodnou parametrizaci.

6 (b) Spočítejte integrál

$$\int_\Omega z\,dxdydz.$$

① $f_k(x) = \sin\left(\frac{\sin^k x}{2+\sin^k x}\right)$; $x \in [0, 2\pi]$.

(a) $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$: $|\sin x| < 1 \Rightarrow \sin^k x \to 0$

$x = \frac{\pi}{2}$: $\sin^k x \equiv 1$

$x = +\frac{3\pi}{2}$: $\sin^k x = (-1)^k$ nemá limitu.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \\ \sin\frac{2}{3} & x = \frac{\pi}{2} \\ \text{není definována} & x = \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

(b) $I = [0, \delta]$: (i) $\delta < \frac{\pi}{2}$:

$$\sigma_k = \sup_{x \in I} |f_k(x) - f(x)| = \sup_{x \in I} \left|\sin\left(\frac{\sin^k x}{2+\sin^k x}\right)\right|$$

$$\leq \sup_{x \in I} \frac{\sin^k x}{2+\sin^k x} \leq \frac{1}{2}(\sin\delta)^k \to 0.$$

neboť $|\sin y| \leq |y|$

$\sin x$ roste na $[0, \delta]$;

$\delta < \frac{\pi}{2}$.

ANO.

f

(ii) $\delta \geq \frac{\pi}{2}$: NE ; $f(t)$ nespojité v $\frac{\pi}{2}$ zleva.

(iii) $I = [\pi - \delta, \pi + \delta]$:

NE ; pokud $\delta \geq \frac{\pi}{2}$ (opět nespojitost $f(t)$ v $\frac{\pi}{2}$).

ANO ; pokud $\delta < \frac{\pi}{2}$:

$$|f_k(x)| \leq \frac{|\sin^k x|}{2 - |\sin^k x|} \leq \underbrace{\frac{\sin^k(\pi+\delta)}{2-1}}_{\text{odhad nezávislý na } t} \to 0.$$

(c): ANO : libovolné $\delta < \frac{\pi}{2}$:

$$g_k(t) = (-1)^k \left[f_k(t) - f(t) \right].$$

leč: $x \in [0, \delta]$: $|g_k(t)| \leq \frac{1}{2} (\sin \delta)^k$

viz bod (a);

$\sum (\sin \delta)^k$ konv. (geom. řada...)

$\Rightarrow \sum g_k(t)$ konv. abs. stejn. v $[0, \delta]$

(Weierstrass...)

(2) $\Phi[y] = \int_1^2 x(y')^2 + yy' + xy \, dx$. $y(1) = \frac{1}{8}$

$y(2) = \frac{1}{2} - \ln 2$

$f = xr^2 + yr + xy$.

$f_y = r + x$

$f_r = 2xr + y$.

E.L. $(2xy' + y)' - (y' + x) = 0$

$(2xy')' = x$

$2xy' = \frac{x^2}{2} + c$

$y' = \frac{x}{4} + \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{x}$

$y = \frac{x^2}{8} + \frac{c}{2} \ln x + d$.

$y(1) = \frac{1}{8}$: $d = 0$

$y(2) = \frac{1}{2} - \ln 2$: $c = 2$

extremála: $\boxed{y_p(x) = \frac{x^2}{8} - \ln x.}$

$f_{yy} = 0$ $\qquad$ $P = f_{zz} = 2x$

$f_{zz} = 2x$ $\qquad$ $Q = f_{yy} - (f_{yz})'$

$f_{yz} = 1$ $\qquad$ $= 0$

(J) $\qquad (2xu')' = 0$

$$2xu' = A$$

$$u' = \frac{A}{2x}$$

$$\boxed{u = \frac{A}{2} \ln x + B.}$$

μ = monotónní;

ergo: $\nexists$ konj. bod:

$P = 2x > 0$ na $[1,2] \Rightarrow$ lok. min.

③ $f(a,x) = \frac{1}{x^{3/2}}\left(e^{-ax} - \frac{1}{1+x}\right).$

(a) $f(a,\cdot)$ spojité v $(0,\infty)$.

u nuly: $f(a,x) \sim x^{-\frac{1}{2}}$.

dk.: $\frac{f(a,x)}{x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x}\left(e^{-ax} - \frac{1}{1+x}\right)$

l'Hosp.: $\frac{1}{1}\cdot\left(-a e^{-ax} + \frac{1}{(1+x)^2}\right) \to 1-a.$

Pozn.: $a=1$ je dokonce $f(a,x) = o(x^{-\frac{1}{2}})$.

$\int_0^\delta \frac{dx}{\sqrt{x}} < \infty$: $\Rightarrow \int_0^\delta f(a,x)\,dx < \infty \quad \forall a \in \mathbb{R}$

u $+\infty$: nutné: $a \geq 0$.

($a<0$: $f(a,x) \to +\infty$ i $x \to +\infty$).

jinak: $|f(a,x)| \leq \frac{|e^{-ax}| + \frac{1}{1+x}}{x^{3/2}} \leq \frac{2}{x^{3/2}}$

$= \cancel{\frac{1}{\sqrt{x}} e^{-ax} + \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}}$ $\quad \int^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} < \infty$

$I = [0,\infty)$.

(b): $f(a,\cdot)$ měřitelné ($\leftarrow$ spojité)

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -\frac{e^{-ax}}{x^{1/2}}.$$

majoranta: volme $J = (\varepsilon, +\infty)$; $\varepsilon > 0$ zvolme...

$$\sup_{a\in J} \left|\frac{\partial f}{\partial a}(a,x)\right| = \sup_{a \geq \varepsilon} \frac{e^{-ax}}{x^{1/2}} = \frac{e^{-\varepsilon x}}{x^{1/2}}.$$

integrovatelné...

$$\Rightarrow \quad F'(a) = -\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x^{1/2}}\,dx; \quad \forall a > 0.$$

(c):
$$-F(n) = \int_0^\infty \underbrace{\frac{\frac{1}{1+x} - e^{-nx}}{x^{3/2}}}_{f_n(x)}.$$

$$f_n(x) \to \frac{1}{(1+x)\,x^{3/2}} =: f(x); \quad f(x) \geq 0; \text{ měřitelné}$$

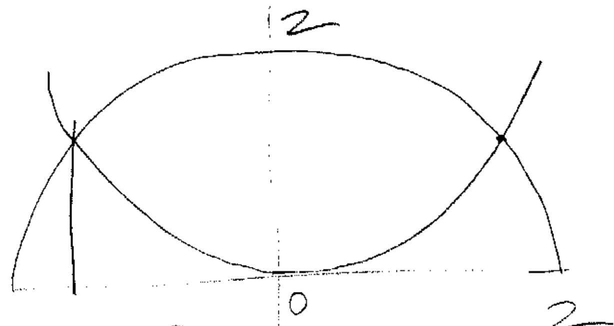
$$\int_0^\infty f(x)\,dx = +\infty$$

zároveň: Leviho věta: $-e^{-nx} \nearrow 0$

$$e^{-nx} \leq e^{-x} \leq (1+x)^{-1}.$$

(4) Ω : $z < \sqrt{4-x^2-y^2}$

$z > \frac{1}{3}(x^2+y^2)$.



$R=\sqrt{3}$

válcové souř: $x = r\cos u$

$y = r\sin u$

$z = h$

$$\sqrt{4-R^2} = \frac{1}{3}R^2$$

$$9(4-R^2) = R^4$$

$$0 = R^4 + 9R^2 - 36$$

$$0 = (R^2+12)(R^2-3).$$

$$R = \sqrt{3}$$

---

parametrizace: $u \in (0, 2\pi)$ $\quad J = r$.

M: $r \in (0, \sqrt{3})$

$h \in \left(\frac{1}{3}r^2, \sqrt{4-r^2}\right)$.

$$\int_\Omega z \, dx\,dy\,dz = \int_M h\cdot r \; dr\,du\,dh = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(r \int_{\frac{1}{3}r^2}^{\sqrt{4-r^2}} h\,dh \right) dr$$

$\cancel{= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}}}$ vnitřek: $\frac{1}{2}\left[\frac{h^2}{\cancel{2}}\right]_{\frac{1}{3}r^2}^{\sqrt{4-r^2}} = \frac{1}{2}\left(4 - r^2 - \frac{1}{9}r^4\right)$

altern: $\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(4r - r^3 - \frac{r^5}{9} \right) dr = \pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{54} \right]_0^{\sqrt{3}}$

$$= \frac{13}{4}\pi .$$

---

nagn: $\underset{\sim}{F} = \left(0, 0, \frac{1}{2} r^2 \right).$