21. Fourierovy řady.

Definice. Řada funkcí

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx] \tag{T}$$

kde a_k, $b_k \in \mathbb{R}$ jsou konstanty, se nazývá trigonometrická řada.

Poznámka. Pokud tato řada konverguje, je její součet 2π-periodická funkce. Lze naopak každou 2π-periodickou funkci napsat jako součet nějaké trigonometrické řady? – Jedna z hlavních otázek kapitoly.

Lemma 21.1.
(1) $\int_0^{2\pi} \sin nx = \int_0^{2\pi} \cos nx = 0$ pro $\forall n \neq 0$ celé,
(2) $\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx = 0$ pro $\forall m$, $n \geq 1$ celá,
(3) $\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx = \pi\delta_{mn}$ pro $\forall m$, $n \geq 1$ celá, (δ_{mn} je Kroneckerovo delta).

Poznámka. Předchozí lemma říká, že tzv. trigonometrický systém

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, ...\}$$

je ortogonální vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$.

Značení. $f \in L^p_{\text{per}}(0, 2\pi)$ znamená, že f je měřitelná v $\mathbb{R}$, 2π-periodická a $\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\,dx < \infty$.

Definice. Nechť $f \in L^1_{\text{per}}(0, 2\pi)$. Trigonometrická řada (T) s koeficienty

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx \qquad k \geq 1 \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx \qquad k \geq 1 \end{aligned} \tag{FK}$$

se nazývá Fourierova řada funkce f. Značí se $\mathcal{F}_f$. Její n-tý částečný součet značíme

$$\mathcal{F}_{f,n}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos kx + b_k \sin kx\right].$$

Je tedy $\mathcal{F}_f(x) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_{f,n}(x)$. Čísla a_k, b_k se nazývají Fourierovy koeficienty funkce f.

Poznámky.

• je $\mathcal{F}_f(x) = f(x)$? Jistě ne vždy ve všech bodech – je-li $f = 0$ s.v., pak $a_k = b_k = 0$ a tedy nutně $\mathcal{F}_f \equiv 0$. Obecně, a_k, b_k a tudíž $\mathcal{F}_f$,,nevidí" změny f na množině míry 0.

• $\mathcal{F}_f$ je vždy 2π-periodická, zkoumanou f tedy také rozšíříme 2π-periodicky.

• je-li f funkce 2π-periodická, potom $\int_0^{2\pi} f = \int_{-\pi}^{\pi} f = \int_a^{a+2\pi} f$ pro $\forall a \in R$

• obecněji, pro f funkci l-periodickou definujeme

$$\mathcal{F}_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi}{l}kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{l}kx\right) \right]$$

kde

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{l}kx\right) dx\,, \quad b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{l}kx\right) dx\,.$$

(Platí příslušné analogie výsledků této kapitoly.)

• f sudá $\implies$ $b_k = 0$; f lichá $\implies$ $a_k = 0$.

Věta 21.1. Nechť řada (T) konverguje stejnoměrně v $[0, 2\pi]$. Označme $f(x)$ její součet. Potom čísla a_k, b_k lze vypočíst podle vzorců (FK) výše.

Lemma 21.2. [Komplexní tvar Fourierovy řady.] Nechť $f \in L^1_{\text{per}}(0, 2\pi)$, nechť a_k, b_k jsou její Fourierovy koeficienty. Označme

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\, dx\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Potom platí vztahy

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} \\ c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \quad k \geq 1 \\ c_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

respektive

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 \\ a_k &= c_k + c_{-k} \qquad k \geq 1 \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) \qquad k \geq 1 \end{aligned}$$

Pro n-tý částečný součet Fourierovy řady $\mathcal{F}_{f,n}(x)$ platí

$$\mathcal{F}_{f,n}(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \exp(ikx)\,,$$

a tedy (formálně)

$$\mathcal{F}_f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \exp(ikx)\,.$$

Lemma 21.3. [Integrální tvar F.ř.] Nechť $f \in L^1_{\text{per}}(0, 2\pi)$. Potom pro n-tý částečný součet F.ř. funkce f platí

$$\mathcal{F}_{f,n}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) D_n(z)\,dz$$

kde

$$D_n(z) = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)z\right]}{2\sin\left(\frac{z}{2}\right)}$$

se nazývá Dirichletovo integrační jádro.

Poznámky.
- $D_n(z)$ je sudá, C^∞, 2π-periodická funkce.
- $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z)\,dz = 1$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definice. Funkci f nazveme po částech spojitou v (a, b), pokud existují body $x_0 = a < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b$ takové, že f je spojitá v intervalech (x_{j-1}, x_j) a navíc má v bodech x_j jednostranné vlastní limity.
Funkci nazveme po částech C^N, jsou-li funkce f, f', …, $f^{(N)}$ po částech spojité.

Příklady. ① $\operatorname{sgn}(x)$ je po částech C^1, není spojitá
② $|x|$ je spojitá, je po částech C^1, není C^1
③ $\sqrt[3]{x}$ je spojitá, není po částech C^1 (derivace je nespojitá v $x = 0$, nemá zde konečné limity.)

Poznámka. Z naší definice lze dovodit, že funkce po částech spojitá je nutně omezená. Proto například $f(x) = \ln x$ je sice spojitá, leč není po částech spojitá v $(0, 1)$.
Samozřejmě funkce po částech spojitá není obecně spojitá. Definice dokonce povoluje, že f není definována v bodech x_j.

Věta 21.2. [O konvergenci Fourierovy řady.] Nechť $f \in L^1_{\text{per}}(0, 2\pi)$ a navíc f je po částech C^1 v intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Potom pro $\forall x \in (a, b)$ je

$$\mathcal{F}_f(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}\,.$$

Speciálně $\mathcal{F}_f(x) = f(x)$ v těch bodech $x \in (a, b)$, kde je $f(x)$ spojitá.

Poznámka. Ohledně (ne)nastávání rovnosti

$$f(x) = \mathcal{F}_f(x) \tag{*}$$

je známo toto:

- lze sestrojit $f \in L^1_{\text{per}}(0, 2\pi)$ takovou, že (*) neplatí pro vůbec žádné x.
- je-li $f \in L^2_{\text{per}}(0, 2\pi)$, tak (*) platí pro skoro všechna x. Slavný výsledek L. Carlesona z roku 1965 (se záhadným důkazem).
- pokud f je spojitá 2π-periodická funkce, stále mohou existovat body (dokonce nekonečně bodů) takové, že (*) neplatí.
- pokud f je spojitá, a f' je po částech spojitá, tak (*) platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Toto jsme dokázali (Věta 21.2).

Lemma 21.4.[1] [Riemann-Lebesgueovo.] Nechť $f \in L^1(a, b)$. Potom

$$\lim_{t \to \infty} \int_\alpha^\beta f(x) \sin(tx)\, dx = 0\,, \qquad \lim_{t \to \infty} \int_\alpha^\beta f(x) \cos(tx)\, dx = 0\,.$$

kde $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ je libovolný interval.

Věta 21.3. [Riemannova věta o lokalizaci.] Nechť $f \in L^1_{\text{per}}(0, 2\pi)$; $A \in R$, $x \in \mathbb{R}$ a $\delta \in (0, \pi)$ jsou pevná čísla. Potom je ekvivalentní:

1. $\mathcal{F}_f(x) = A$
2. $$\int_0^\delta \big\{ f(x+z) + f(x-z) - 2A \big\}\, D_n(z)\, dz \to 0 \qquad \text{pro } n \to \infty\,.$$

Důsledek. O tom, čemu se rovná $\mathcal{F}_f(x)$, rozhoduje pouze chování f na $(x - \delta, x + \delta)$, kde $\delta > 0$ je pevně zvolené číslo (může být velmi malé.)

Definice. Pro interval $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a $p \in [1, \infty)$ definuji

$$L^p(a, b) = \{ f(x) : (a, b) \to \mathbb{R};\ f \text{ je měřitelná, } \int_a^b |f(x)|^p < \infty \}$$

[1] Důkaz pro po částech spojité funkce.

tzv. L^p-integrovatelné funkce.

Poznámky.
- $L^1(a,b) = L(a,b)$ ... Lebesgueovsky integrovatelné funkce
- $L^2(a,b)$ je velmi důležitý, neboť v něm lze zavést skalární součin $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$; normu v prostoru L^2 definujeme

$$\|f\|_{L^2(a,b)} = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx}\,.$$

Věta 21.4.[2] [Parsevalova rovnost.] Nechť $f \in L^2_{\mathrm{per}}(0,2\pi)$, nechť $\mathcal{F}_{f,n}(x)$ je částečný součet Fourierovy řady, a_k, b_k Fourierovy koeficienty. Potom platí:
(1)
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} |\mathcal{F}_{f,n}(x) - f(x)|^2\,dx = 0\,;$$
(2)
$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx\,.$$

Poznámky.
- (1) říká, že $\mathcal{F}_{f,n} \to f$ v prostoru $L^2(0,2\pi)$
- (2) lze chápat jako Pythagorovu větu: (PS) = velikost f (v normě L^2) na druhou, (LS) = součet druhých mocnin souřadnic f (a_k, b_k jako souřadnice vzhledem ke trigonometrickému systému)
- pro obecnou periodu ℓ má Parsevalova rovnost tvar

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} |f(x)|^2\,dx$$

Poznámka.
- $f(x) \in L^1_{\mathrm{per}}(0,2\pi) \implies a_k,\ b_k \to 0$ (Důsledek Lemmatu 21.4.)
- $f(x) \in L^2_{\mathrm{per}}(0,2\pi) \implies \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$ konverguje (Důsledek Věty 21.4.)

Platí obecný princip : čím je f „regulárnější“, tím rychleji a_k, $b_k \to 0$. Viz též následující věty.

Opakování.
<u>Věta 15.13.</u> $f_k(x)$ spojité, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně $\implies s(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ je spojitá

[2] Důkaz ekvivalence (1) a (2), a "$\le$" v (2). Důkaz pro C^1 a obecné L^2 funkce viz „Nepovinný dodatek".

Věta 15.9. (Weierstrass) $|f_k(x)| \leq c_k$ (čísla c_k nezávisí na x), $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konverguje $\implies \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně
Věta 15.15. $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje, $f_k(x)$ jsou diferencovatelné, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ konverguje stejnoměrně $\implies s(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ je diferencovatelná, a $s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$

Věta 21.5. Nechť

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx] \ ,$$

a existují $C > 0$, $N \geq 0$ celé tak, že platí

$$|a_k| + |b_k| \leq \frac{C}{k^{N+2}} \, .$$

Potom $f \in C^N(\mathbb{R})$.

Věta 21.6. Nechť $f \in C^N(\mathbb{R})$ je 2π-periodická, nechť navíc $f^{(N+1)}$, $f^{(N+2)}$ jsou po částech spojité. Potom pro Fourierovy koeficienty platí

$$|a_k| + |b_k| \leq \frac{C}{k^{N+2}} \, .$$

Důsledek. Vidíme, že hladkost funkce je přímo úměrná tomu, jak rychle Fourierovy koeficienty klesají do nuly.
Z předchozích vět vyplývá, že pro funkce s po částech spojitými derivacemi platí $f \in C^N \setminus C^{N+1} \iff$ Fourierovy koeficienty splňují $|a_k|+|b_k| \sim 1/k^{N+2}$. Pro funkci, která je po částech spojitá, ale není spojitá, platí $|a_k|+|b_k| \sim 1/k$.

Věta 21.7. [Integrování Fourierovy řady člen po členu.] Nechť f je po částech spojitá, 2π-periodická, nechť a_k, b_k jsou její Fourierovy koeficienty. Potom pro $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\int_0^x f(t)\, dt - \frac{a_0}{2} x = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{-b_k}{k} \cos kx + \frac{a_k}{k} \sin kx\right]$$

kde $A_0 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$.

Poznámka. Závěr předchozí věty dostaneme „formálně“ integrováním rovnosti $\mathcal{F}_f = f(x)$; ta ovšem za daných předpokladů nemusí platit.

Důsledek. Nechť $f(x)$ je spojitá, 2π-periodická funkce. Nechť všechny její Fourierovy koeficienty jsou nulové. Potom $f(x)$ je identicky nulová v $\mathbb{R}$.