22. Abstraktní Fourierovy řady.

Opakování. Vektorový prostor X je množina, jejíž prvky lze sčítat, násobit skalárem (typicky z $\mathbb{C}$), a obsahuje prvek $\mathbf{0}$ (nulový vektor.)
Norma je přiřazení $x \mapsto \|x\|$, splňující:

1. $\|x\| \geq 0$, a $\|x\| = 0$ právě když $x = \mathbf{0}$
2. $\|ax\| = |a|\|x\|$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost)

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Pro $p \in [1, \infty)$ definujeme

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} :\ f \text{ je měřitelná, } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

respektive pro $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} :\ f \text{ je měřitelná a } \exists C \text{ tak, že } |f(x)| \leq C \text{ s.v. v } \Omega \right\}$$

Terminologie: funkce L^p-integrovatelné resp. esenciálně omezené.
Norma na prostoru $L^p(\Omega)$ se definuje pro $p < \infty$ jako

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left\{ \int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}$$

respektive pro $p = \infty$ jako

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \left\{ C > 0 :\ |f(x)| \leq C \text{ s.v. v } \Omega \right\}$$

Poznámka. Obecně $\|f\|_{L^p(\Omega)} = 0$ implikuje jen $f = 0$ s.v. a nikoliv $f = 0$.
Řešení: v prostorech L^p považuji funkce, které se rovnají skoro všude, za totožné. (Například Dirichletovu funkci a funkci nulovou.)
Důsledek: nemá smysl hovořit o takových vlastnostech funkce z L^p, které se změní, změním-li funkci na množině míry nula (například hodnota v jednom bodě.) Má smysl hovořit jen o takových vlastnostech, které na takové změně nezáleží (například integrál přes měřitelnou množinu, speciálně norma).

Lemma 22.1. [Youngova nerovnost.] Nechť a, $b \geq 0$ a nechť $1 < p$, $q < \infty$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Poznámka. Speciálně pro $p = q = 2$: $ab \leq a^2/2 + b^2/2$.

Lemma 22.2. [Hölderova nerovnost.] Nechť $u(x)$, $v(x) : \Omega \to \mathbb{R}^*$ jsou měřitelné, nechť p, $q \in (1, \infty)$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \Big(\int_\Omega |u(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_\Omega |u(x)|^q dx \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

(S úmluvou $0 \cdot \infty = 0$.)

Lemma 22.3. [Minkowského nerovnost.] Pro $p \in (1, \infty)$ a f, $g : \Omega \to \mathbb{R}^*$ měřitelné je

$$\Big(\int_\Omega |f(x) + g(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int_\Omega |f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_\Omega |g(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Důsledek. Trojúhelníková nerovnost pro normu v $L^p(\Omega)$.

Poznámky. ① Lze dokázat, že $L^p(\Omega)$ je úplný prostor. Viz Jarník: Integrální počet II, Věta 199, s. 545.
② Hlubším tvrzením je hustota $C_c^\infty(\Omega)$ v $L^p(\Omega)$:

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big) \big(\forall f \in L^p(\Omega)\big) \big(\exists g \in C_c^\infty(\Omega)\big) \Big[\|f - g\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon \Big].$$

(Platí pouze pro $p < \infty$.)

Opakování. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný vektorový prostor. Pomocí normy definujeme konvergenci posloupnosti

$$x_n \to x_0 \text{ v } X \qquad \text{právě když} \qquad \|x_n - x_0\| \to 0.$$

Analogicky konvergenci řady: $\sum_{k=1}^\infty x_k = s$ (kde x_k, $s \in X$), právě když $s_n \to s$, kde $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$.

Definice. Posloupnost x_n se nazve cauchyovská, jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big) \big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big) \big[m, n \geq n_0 \implies \|x_n - x_m\| < \varepsilon \big].$$

Prostor, ve kterém cauchyovská posloupnost je vždy konvergentní (tj. má limitu) se nazývá úplný. Normovaný vektorový prostor, který je úplný, se nazývá Banachův prostor.

Příklady. $\mathbb{R}^n$ (s eukleidovskou normou) je Banachův prostor – úplnost byla dokázána dokázána loni v přednášce nMAF052. Výše definované prostory $L^p(\Omega)$ jsou Banachovy.

Věta 22.1. Nechť X je Banachův prostor, $x_k \in X$. Jestliže $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\|$ konverguje, pak také řada $\sum_{k=1}^\infty x_k$ konverguje. (Absolutní konvergence implikuje konvergenci.)

Opakování. Skalární součin je přiřazení x, $y \mapsto \langle x, y \rangle$, splňující:

1. přiřazení $x \mapsto \langle x, y\rangle$ je lineární (při y pevném)

2. $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$

3. $\langle x, x\rangle \geq 0$, a $\langle x, x\rangle = 0$ právě když $x = \mathbf{0}$.

Poznámky.
• Z 1., 2. plyne: $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$, a $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$, $\langle x, ay\rangle = \overline{a}\langle x, y\rangle$.

• (důležité) skalární součin vždy vytváří normu předpisem $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Platí tzv. Cauchy-Schwartzova nerovnost

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|\,.$$

Definice. Prostor se skalárním součinem, který je úplný (vzhledem k normě, vytvořené skalárním součinem), se nazývá Hilbertův prostor.

Úmluva. V dalším značí H Hilbertův prostor. Tj. prostor se skálárním součinem, který uvažujeme automaticky s normou $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, a který je úplný.

Příklad. Prostor $L^2(\Omega)$ se skalárním součinem

$$\langle f, g\rangle := \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

je Hilbertův prostor. (Samozřejme $\mathbb{R}^n$ je Hilbertův, ale nás budou nadále zajímat nekonečně-dimenzionální případy.)

Lemma 22.4.

1. přiřazení $x \mapsto \|x\|$ je spojité

2. přiřazení x, $y \mapsto \langle x, y\rangle$ je spojité

Definice. Řekneme, že $\{x_n\} \subset H$ tvoří ortogonální (OG) systém, jestliže $x_n \neq \mathbf{0}$, a $\langle x_n, x_m\rangle = 0$ pro $m \neq n$. Systém se nazve ortonormální, pokud navíc $\|x_n\| = 1$ pro $\forall n$.

Příklad. Trigonometrický systém

$$\big\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \dots\big\}$$

je OG v prostoru $L^2(0, 2\pi)$. Viz Lemma 21.1.

Z ortogonálního systému vznikne ortonormální, klademe-li $\tilde{x}_n = x_n/\|x_n\|$. ON trigonometrický systém je

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \dots\right\}.$$

Klíčová otázka kapitoly. Je dán nějaký OG systém $\{x_n\} \subset H$, a my se ptáme, zda každý prvek $x \in H$ lze vyjádřit jako $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$.

Věta 22.2. Nechť $\{x_n\} \subset H$ je OG systém, $c_k \in \mathbb{C}$, nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ konverguje a má součet $x \in H$. Potom

$$c_k = \frac{\langle x, x_k\rangle}{\langle x_k, x_k\rangle}. \tag{FK}$$

Definice. Nechť $\mathscr{S} = \{x_n\} \subset H$ je OG systém, a $x \in H$ je libovolné. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$, kde c_k jsou definována v (FK) výše, se nazývá Fourierova řada prvku x vzhledem k systému $\mathscr{S}$.
Značí se $F_{x,\mathscr{S}}$. Čísla c_k se nazývají Fourierovy koeficienty (prvku x vzhledem k systému $\mathscr{S}$.)

Věta 22.3. Nechť $\mathscr{S} = \{x_n\} \subset H$ je OG systém, $x \in H$ je libovolné, c_k a $F_{x,\mathscr{S}}$ jsou jak řečeno výše. Potom platí:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|x_k\|^2 \le \|x\|^2$
2. řada $F_{x,\mathscr{S}}$ konverguje (ve smyslu normy v H)
3. $F_{x,\mathscr{S}} = x$ právě tehdy, když v bodě 1. nastává rovnost.

Definice. OG systém $\{x_n\} \subset H$ se nazve úplný, pokud platí: je-li $x \in H$ takové, že $\langle x, x_n\rangle = 0$ pro $\forall n$, pak nutně $x = \mathbf{0}$.

Příklady. ① Trigonometrický systém je úplný v $L^2(0, 2\pi)$. ② OG systémy probírané na cvičení (Legendreovy, Hermitovy, Čebyševovy polynomy) jsou vesměs úplné v odpovídajících prostorech

Věta 22.4. Nechť H je Hilbertův prostor, $\mathscr{S} = \{x_n\}$ je OG systém. Potom je ekvivalentní:

1. systém $\{x_n\}$ je úplný
2. pro $\forall x \in H$ platí $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|x_k\|^2 = \|x\|^2$
3. pro $\forall x \in H$ platí $F_{x,\mathscr{S}} = x$

Zde c_k, $F_{x,\mathscr{S}}$ jsou Fourierovy koeficienty resp. Fourierova řada pro x vzhledem k systému $\{x_n\}$.

Věta 22.5.[1] [O nejlepší aproximaci.] Nechť H je Hilbertův prostor, $\mathscr{S} = \{x_n\} \subset H$ je OG systém. Nechť $x \in H$ je libovolné, c_k jsou Fourierovy koeficienty prvku x vzhledem k systému $\{x_n\}$, a $a_k \in \mathbb{C}$ libovolná čísla taková, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ konverguje. Potom

$$\|x - \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k\| \leq \|x - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\|\,,$$

a rovnost nastává právě když $c_k = a_k$ pro $\forall k$.

Definice. Nechť X je vektorový prostor. Množina $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ se nazve (algebraická) báze X, pokud každé $x \in X$ lze jediným způsobem napsat jako *konečný součet* $\sum_{k=1}^{N} c_k x_{\alpha_k}$, kde $c_k \in \mathbb{C}$.
Nechť X je prostor s normou. Spočetná množina $\{x_n\}_{n\in N}$ se nazve Schauderova báze X, pokud každé $x \in X$ lze jediným způsobem napsat jako *součet řady* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$, kde $c_k \in \mathbb{C}$.

Poznámky.
• v konečně-dimenzionálním prostoru je algebraická báze totéž co Schauderova báze; obě báze jsou konečné
• pokud $\dim X = \infty$, je algebraická báze zpravidla nespočetná. Často však existuje Schauderova báze. Prakticky vzato je pohodlnější pracovat s řadou (jakožto spočetnou lineární kombinací), než konečnými součty prvků, které vybírám z nespočetné algebraické báze.
• z Věty 22.4. vyplývá, že úplný OG systém je příkladem Schauderovy báze (jednoznačnost koeficientů plyne z Věty 22.2.) Hovoříme také o Hilbertově bázi prostoru H.

[1] Bez důkazu.