23. Funkce komplexní proměnné.

Definice.

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy : \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

kde $i^2 = -1$ (imaginární jednotka), $\operatorname{Re} z = x$ (reálná část), $\operatorname{Im} z = y$ (imaginární část), $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (absolutní hodnota), $\overline{z} = x - iy$ (číslo komplexně sdružené).

Poznámka. Ztotožnění: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $z = x + iy \leftrightarrow (x, y)$. Shoduje se i $|z| = \|(x, y)\|_2$.

Definice. $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Terminologie: $\mathbb{C}$ …otevřená Gaussova rovina, $\mathbb{S}$ …uzavřená Gaussova rovina alias Riemannova sféra, ∞...komplexní nekonečno. Okolí bodu ($z_0 \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{S}$):

$$U(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < \varepsilon\}$$
$$U(\infty, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C};\ |z| > \frac{1}{\varepsilon}\} \cup \{\infty\}$$
$$P(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$$

Početní pravidla:
- $a \pm \infty = \infty$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$
- $a \cdot \infty = \infty$ pro $\forall a \in \mathbb{S} \setminus \{0\}$
- $a/\infty = 0$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$
- $\boxed{a/0 = \infty}$ pro $\forall a \in \mathbb{S} \setminus \{0\}$

Nedefinováno zůstává: $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞, $\infty \pm \infty$.

Příklady. [Funkce komplexní proměnné.]
- polynomy, racionální funkce.
- e^z, $\sin z$, $\cos z$ - definovány mocinnou řadou, která (absolutně) konverguje pro $\forall z \in \mathbb{C}$. Klíčový vztah:

$$\exp(a + ib) = \exp(a)[\cos b + i \sin b]$$

Definice. Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definujeme

$$\log z = \{\zeta \in \mathbb{C} : \ \exp \zeta = z\}$$
$$\arg z = \{\beta \in \mathbb{R} : \ z = |z| \exp(i\beta)\}$$
$$\operatorname{Log} z = \{\zeta \in \log z : \ \operatorname{Im}(\zeta) \in (-\pi, \pi]\}$$
$$\operatorname{Arg} z = \{\beta \in \arg z : \ \beta \in (-\pi, \pi]\}$$

Poznámky.
- log, arg nejsou to funkce v klasickém smyslu: číslu je přiřazena množina.

Např.: $\log 1 = \{2k\pi i : \ k \in \mathbb{Z}\}$.
• Log, Arg funkce jsou: číslu je přiřazeno právě jedno číslo.
• platí vztahy (ln je klasický reálný logaritmus):

$$\begin{aligned} \zeta \in \log z \iff \operatorname{Re}\zeta = \ln|z| \ \& \ \operatorname{Im}\zeta \in \arg z \\ \operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z \end{aligned}$$

Definice. [Komplexní mocnina.] Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{C}$ definujeme

$$m_a(z) = \{ \exp(a\zeta) : \ \zeta \in \log z \}$$

Definice. Pro $z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z) : U(z_0) \to \mathbb{C}$ definujeme

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Limitu chápu v $\mathbb{C}$ a musí být vlastní. Ekvivalentní definice: $f'(z_0) = A$ právě když

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + Ah + r(h)$$

kde $r(h) = o(|h|)$ pro $h \to 0$.
Značím $f^{(1)}(z) = f'(z)$ a indukcí $f^{(n+1)}(z) = [f^{(n)}(z)]'$.

Věta 23.1. [1] Platí:
(1) $(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$
(2) $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
(3) $(f/g)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$ pokud $g(z) \neq 0$
(4) $(f_{-1})'(w) = 1/f'(f_{-1}(w))$, je-li $f(z)$ prostá a $f'(z) \neq 0$
(5) $(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$

Úmluva. Ω je otevřená část $\mathbb{C}$.

Definice. Funkce $f(z) : \Omega \to \mathbb{C}$ se nazve holomorfní v Ω, pokud $f'(z)$ existuje všude v Ω. Značíme $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Příklady.
• polynom $P(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$
• racionální funkce $R(z) = P(z)/Q(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{z : \ Q(z) = 0\})$
• e^z, $\sin z$, $\cos z \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ (neboť mocninnou řadu lze derivovat člen po členu, viz loňská Věta 11.4.)
• Věta 23.1. $\Longrightarrow$ sčítáním, odčítáním, násobením, dělením, invertováním a skládáním holomorfních funkcí vzniká funkce holomorfní (na patřičném definičním oboru)

[1] Bez důkazu.

Poznámka. Ztotožnění $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ... ztotožnění $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s funkcí $\boldsymbol{F}(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $z = x + iy$ a $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2) = (\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f)$.

Příklad. $f(z) = z^2$ odpovídá $\boldsymbol{F}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

Věta 23.2. [Cauchy-Riemannovy podmínky.] Nechť $f(z) : U(z_0) \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Nechť $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2)(x, y) : U((x_0, y_0)) \to \mathbb{R}^2$ jí odpovídá dle výše uvedeného ztotožnění, kde $z_0 = x_0 + iy_0$. Potom následující je ekvivalentní:
(1) existuje $f'(z_0)$ (derivace podle komplexní proměnné)
(2) funkce $\boldsymbol{F}$ má v bodě (x_0, y_0) totální diferenciál a navíc v (x_0, y_0) platí tzv. Cauchy-Riemannovy podmínky:

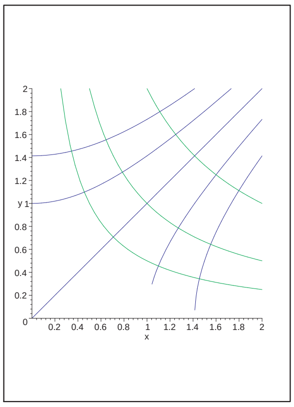
$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = -\frac{\partial F_1}{\partial y}$$

Během důkazu také zjistíme, že platí:

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} - i \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial y} + i \frac{\partial F_2}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)}$$

Poznámky.
• holomorfnost funkce (=existence $f'(z)$) je mnohem restriktivnější, než se zdá na první pohled, a má řadu důsledků.
• funkce $f(z) = \operatorname{Re} z$ není holomorfní: nesplní C.R. podmínky.

Věta 23.3. Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$ a $f'(z) \neq 0$ v Ω. Potom systémy křivek $\{\operatorname{Re} f = konst\}$ a $\{\operatorname{Im} f = konst\}$ jsou navzájem ortogonální. Tj., tyto křivky se mohou protínat jen pod pravým úhlem.



Příklad. Křivky $\operatorname{Re} z^2 = c$ (tj. $x^2 - y^2 = c$, modré hyperboly) a $\operatorname{Im} z^2 = c$ (tj. $2xy = c$, zeleně.)

Opakování. Řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad (*)$$

(kde z, z_0, $a_k \in \mathbb{C}$) se nazývá mocninná řada o středu z_0. Existuje (jednoznačně určené) číslo $R \in [0, +\infty]$ tak, že řada (*) konverguje pro každé $z \in U(z_0, R)$ a diverguje pro $|z - z_0| > R$. Na množině $U(z_0, R)$ lze řadu libovolně krát derivovat/integrovat (dle komplexní proměnné.) Speciálně, její součet je zde holomorfní. Viz kapitola 11.

Definice. Nechť z_0, $a_k \in \mathbb{C}$. Řada

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad (1)$$

se nazývá Laurentova („lóránova") řada o středu z_0. Chápeme ji jako součet řad

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{resp.} \qquad (3) \quad \sum_{l=1}^{\infty} a_{-l} (z - z_0)^{-l},$$

které se nazývají regulární resp. hlavní část řady (1). Řekneme, že (1) konverguje (absolutně konverguje), pokud řady (2) a (3) mají tuto vlastnost.

Poznámky.
- jde o zobecnění pojmu mocninné řady (*)
- úmluva: $a^0 = 1$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$
- (3) a potažmo (1) nemá smysl pro $z = z_0$

Značení. Pro $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq +\infty$ definuji mezikruží

$$P(z_0; r, R) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ r < |z - z_0| < R \right\}.$$

Věta 23.4. [Konvergence Laurentovy řady.] Je dána Laurentova řada (1). Potom existují jednoznačně určená čísla r, $R \in [0, +\infty]$ tak, že
(i) R je poloměr konvegence regulární části (2)
(ii) hlavní část (3) konveguje pokud $|z-z_0| > r$ a diverguje pokud $|z-z_0| < r$.
Je-li $r < R$, pak Laurentova řada konverguje absolutně v $P(z_0; r, R)$ a její součet je zde holomorfní.
Terminologie: $P(z_0; r, R)$ se nazve mezikruží konvergence Laurentovy řady.

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$. Křivkou v Ω nazýváme funkci $\varphi(t) : [a, b] \to \Omega$, která je spojitá, po částech C^1 a $\varphi'(t) \neq 0$ až na konečně výjimek.
Definujeme geometrický obraz křivky $\langle \varphi \rangle = \{\varphi(t);\ t \in [a, b]\}$, počáteční bod p.b. $= \varphi(a)$, koncový bod k.b. $= \varphi(b)$. Křivka je uzavřená, je-li $\varphi(a) = \varphi(b)$. Křivka je jednoduchá, pokud $\varphi(t)$ je prosté na $[a, b]$; jednoduchá uzavřená, pokud $\varphi(a) = \varphi(b)$ a $\varphi(t)$ je prosté na $[a, b)$.
Jednoduchá, uzavřená křivka se nazývá Jordanova. Oblast ohraničená Jordanovou křivkou φ se značí $\operatorname{int} \varphi$ (od „interior", vnitřek).

Definice. Množina $\Omega \subset \mathbb{C}$ se nazve souvislá, jestliže libovolné její dva body lze spojit křivkou, ležící v Ω. Otevřená, souvislá množina se nazývá oblast. Množina Ω je jednoduše souvislá, je-li souvislá a navíc, každá uzavřená křivka se dá spojitě stáhnout do bodu, aniž opustí Ω.

Definice. Nechť φ je křivka. Pro funkci $f(z) : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ definuji křivkový integrál jako

$$\int_\varphi f(z)\,dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,.$$

Dále definuji délku křivky

$$L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)|\,dt\,.$$

Poznámky. Integrál komplexní funkce na intervalu, tj. $g(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$, definujeme

$$\int_a^b g(t)\,dt := \int_a^b \operatorname{Re} g(t)\,dt + i\int_a^b \operatorname{Im} g(t)\,dt\,.$$

Snadno se ověří, že $\int_a^b [g(t)+h(t)]\,dt = \int_a^b g(t)\,dt + \int_a^b h(t)\,dt$, $\int_a^b cg(t)\,dt = c\int_a^b g(t)\,dt$, pro $c \in \mathbb{C}$.
Integrály chápu jako Lebesgueovy, ale v praxi je počítám jako přírustek primitivní funkce: pokud existuje $G(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ taková, že $G'(t) = g(t)$, pak $\int_a^b g(t)\,dt = G(b) - G(a)$.

Lemma 23.1. Nechť $g(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$. Potom

$$\Big|\int_a^b g(t)\,dt\Big| \le \int_a^b |g(t)|\,dt\,.$$

Definice. Je-li $\varphi(t) : [a,b] \to \Omega$ křivka, definuji křivku opačnou $\dot{-}\varphi := \chi$, kde $\chi(t) = \varphi(-t)$, $t \in [-b,-a]$.
Jsou-li $\varphi(t) : [a,b] \to \Omega$, $\psi(t) : [c,d] \to \Omega$ křivky, a k.b.φ =p.b.ψ, definujeme součet křivek $\varphi \dot{+} \psi := \chi$, kde $\chi(t) : [a, b+d-c] \to \Omega$ je definována

$$\chi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [a,b] \\ \psi(t+c-b), & t \in [b, b+d-c] \end{cases}$$

Věta 23.5. [Vlastnosti křivkového integrálu v $\mathbb{C}$.] Nechť φ, ψ jsou křivky v Ω, $f(z)$, $g(z) : \Omega \to \mathbb{C}$. Potom

1. $\int_\varphi [f(z)+g(z)]\,dz = \int_\varphi f(z)\,dz + \int_\varphi g(z)\,dz$.
2. $\int_\varphi cf(z)\,dz = c\int_\varphi f(z)\,dz$ pro $\forall c \in \mathbb{C}$.
3. $\int_{\varphi\dot{+}\psi} f(z)\,dz = \int_\varphi f(z)\,dz + \int_\psi f(z)\,dz$.

4. $\int_{\dot{-}\varphi} f(z)\,dz = -\int_{\varphi} f(z)\,dz$.

5. Je-li $|f(z)| \leq M$ pro $\forall z \in \langle\varphi\rangle$, tak

$$\Big|\int_{\varphi} f(z)\,dz\Big| \leq ML(\varphi)\,.$$

6. Pokud existuje $F(z) : \Omega \to \mathbb{C}$ taková, že $F'(z) = f(z)$, tak

$$\int_{\varphi} f(z)\,dz = F(k.b.\varphi) - F(p.b.\varphi)\,.$$

Důležitý příklad. Pro $n \in \mathbb{Z}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ a křivku $\varphi(t) = z_0 + r\,\mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ je

$$\int_{\varphi} (z - z_0)^n\,dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

Věta 23.6. [Cauchyho věta.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$, a φ je Jordanova křivka v Ω taková, že $\operatorname{int}\varphi \subset \Omega$. Potom

$$\int_{\varphi} f(z)\,dz = 0\,.$$

Poznámka. Klíčový je předpoklad, že $\operatorname{int}\varphi \subset \Omega$, neboli φ neobíhá kolem žádné singularity $f(z)$. Pro jednoduše souvislou Ω je vždy splněn.

Lemma 23.2. [O velké půlkružnici.] Nechť $\varphi_R := R\,\mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Nechť $f(z)$ je spojitá v množině $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0,\ |z| > R_0\}$.

1. pokud $|f(z)| \leq K/|z|^2$ pro $|z| > R_0$, tak

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\varphi_R} f(z)\,dz = 0\,,$$

2. pokud $|f(z)| \leq K/|z|$ pro $|z| > R_0$, tak

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\varphi_R} f(z)\,\mathrm{e}^{iz}\,dz = 0\,.$$

Poznámka. Předpoklad $|f(z)| \le K/|z|$ (resp. $|f(z)| \le K/|z|^2$) je splněn např. pokud $f(z) = P(z)/Q(z)$, kde P, Q jsou polynomy a $\operatorname{st} Q \ge \operatorname{st} P + 1$ (resp. $\operatorname{st} Q \ge \operatorname{st} P + 2$.)

Lemma 23.3. [O malé (půl)kružnici.] Nechť $f(z)$ je spojitá v $P(z_0)$ a nechť $f(z)(z - z_0) \to A \in \mathbb{C}$ pro $z \to z_0$. Nechť $\varphi_r = z_0 + r\,\mathrm{e}^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$. Potom

$$\lim_{r \to 0+} \int_{\varphi_r} f(z)\, dz = iA(\beta - \alpha)\,.$$

Poznámka. Často používaný speciální případ: je-li $g(z)$ spojitá v $U(z_0)$, je

$$\lim_{r \to 0+} \int_{\varphi_r} \frac{g(z)}{z - z_0}\, dz = ig(z_0)(\beta - \alpha)\,.$$

Věta 23.7. [Cauchyho vzorec.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$, a φ je Jordanova křivka v Ω taková, že $\operatorname{int} \varphi \subset \Omega$. Potom

1. pro $\forall \zeta \in \operatorname{int} \Omega$ je
$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z - \zeta}\, dz\,.$$

2. f je v $\operatorname{int} \varphi$ nekonečněkrát derivovatelná a pro $\forall \zeta \in \operatorname{int} \varphi$ platí
$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{n+1}}\, dz\,.$$

Důsledky.
• hodnoty f uvnitř křivky jsou jednoznačně určeny hodnotami f na křivce samé.
• je-li $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (tj. má první derivaci), je už nutně f nekonečně diferencovatelná v Ω.

Lemma 23.4. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast (tj. otevřená, souvislá množina), nechť $F(z) : \Omega \to \mathbb{C}$ splňuje $F'(z) = 0$ v Ω. Potom $F(z)$ je konstantní v Ω.

Věta 23.8. [Liouville.] Nechť $f(z)$ je holomorfní a omezená v $\mathbb{C}$. Potom $f(z)$ je konstantní.

Věta 23.9. [Základní věta algebry.] Nechť $P(z)$ je polynom, $\operatorname{st} P \ge 1$. Potom existuje $z_0 \in \mathbb{C}$, $P(z_0) = 0$.

Věta 23.10. [Existence Laurentova rozvoje.] Nechť $f(z)$ je holomorfní v mezikruží $P(z_0; r, R)$. Potom platí

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k\,, \qquad z \in P(z_0; r, R)\,. \tag{1}$$

Tato řada se nazývá Laurentův rozvoj $f(z)$ o středu z_0. Konverguje stejnoměrně na množinách striktně uvnitř $P(z_0; r, R)$. Čísla a_k (tzv. Laurentovy koeficienty) jsou určena jednoznačně, a platí

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, dz\,, \tag{2}$$

kde φ je libovolná kružnice $z_0 + \rho\, \mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $\rho \in (r, R)$.

Věta 23.11. [Taylorův rozvoj.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$. Rovnost

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k\,, \qquad \text{kde} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\,,$$

platí v každém kruhu $U(z_0, R)$, který je částí Ω.

Definice. Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0, \delta))$. Koeficient a_{-1} v Laurentově rozvoji funkce $f(z)$ o středu z_0 nazýváme reziduum funkce $f(z)$ v bodě z_0. Značíme $\operatorname{res}_{z_0} f(z)$. Vzhledem k formuli (2) výše máme

$$\int_{\varphi} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_0} f(z)$$

(pro libovolnou kružnici $\varphi = z_0 + \varepsilon\, \mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $\varepsilon \in (0, \delta)$.) Pokud je $f(z)$ holomorfní dokonce v $U(z_0, \delta)$, je $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = 0$.

Věta 23.12. [Reziduová věta.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega \setminus K)$, kde Ω je oblast, K je konečná množina singularit. Nechť φ je kladně orientovaná Jordanova křivka v Ω taková, že $\operatorname{int} \varphi \subset \Omega$ a $\langle \varphi \rangle \cap K = \emptyset$. Potom

$$\int_{\varphi} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{\zeta \in K \cap \operatorname{int} \varphi} \operatorname{res}_{\zeta} f(z)\,.$$

Věta 23.13. [Pravidla pro výpočet rezidua.]

1. Nechť $f(z) = g(z)/(z - z_0)^n$, kde $g(z) \in \mathcal{H}(U(z_0, \delta))$, $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(z_0)\,.$$

2. Nechť $f(z) = g(z)/h(z)$, kde $g(z)$, $h(z) \in \mathcal{H}(U(z_0, \delta))$ a $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$. Potom

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}\,.$$

3. Nechť $f(z) = g(z)/h(z)$, kde $g(z)$, $h(z) \in \mathcal{H}(U(z_0, \delta))$ a $h(z_0) = h'(z_0) = \cdots = h^{(p-1)}(z_0) = 0$, avšak $h^{(p)}(z_0) \neq 0$. Potom

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to z_0} \Big[(z - z_0)^p f(z)\Big]^{(p-1)}.$$

Poznámka. Často používaný speciální případ bodu 1:

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{g(z)}{z - z_0} = g(z_0)\,, \qquad \operatorname{res}_{z_0} \frac{g(z)}{(z - z_0)^2} = g'(z_0)\,.$$

Definice. Bod z_0 nazýváme izolovanou singularitou funkce, jestliže $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0, \delta))$ pro nějaké $\delta > 0$.

Definice. Nechť z_0 je izolovaná singularita $f(z)$, nechť $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ je odpovídající Laurentův rozvoj v $P(z_0, \delta)$. Bod z_0 se nazývá:
(i) odstranitelná singularita, je-li $a_k = 0$ pro $\forall k < 0$
(ii) pól násobnosti $p \in \mathbb{N}$, je-li $a_{-p} \neq 0$ a $a_k = 0$ pro $\forall k < -p$
(iii) podstatná singularita, je-li $a_k \neq 0$ pro nekonečně $k < 0$

Příklady.
- $\frac{\sin z}{z}$, $\frac{1-\cos z}{z^2}$ ... v bodě 0 odstranitelné singularity
- $\frac{e^{z}}{z^3}$ ... v bodě 0 pól násobnosti 3
- $\cosh(1/z)$ ... v bodě 0 podstatná singularita

Věta 23.14. [Odstranitelná singularita.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0, \delta))$. Potom je ekvivalentní:
(1) $f(z)$ má v bodě z_0 odstranitelnou singularitu
(2) existuje $g(z) \in \mathcal{H}(U(z_0, \delta))$ tak, že $f(z) = g(z)$ na $P(z_0, \delta)$
(3) $f(z)$ je omezená na jistém $P(z_0, \delta')$

Věta 23.15. [Pól.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0, \delta))$. Potom je ekvivalentní:
(1) existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že $f(z)$ má v z_0 pól násobnosti p
(2) $f(z) \to \infty$ pro $z \to z_0$

Definice. Množina M je hustá v Ω, pokud

$$\big(\forall w \in \Omega\big)\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big[M \cap U(w, \varepsilon) \neq \emptyset\big]\,.$$

Názorně: prvky Ω mohou libovolně aproximovat pomocí prvků M.

Věta 23.16. [Podstatná singularita.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0, \delta))$. Potom je ekvivalentní:
(1) $f(z)$ má v z_0 podstatnou singularitu
(2) pro $\forall \delta' \in (0, \delta)$ je množina $f(P(z_0, \delta'))$ hustá v $\mathbb{C}$.

Definice. Bod z_0 nazveme hromadným bodem množiny M, jestliže

$$\big(\forall \delta > 0\big)\big[M \cap P(z_0, \delta) \neq \emptyset\big]\,.$$

Ekvivalentně: existují $z_n \in M$, $z_n \to z_0$, avšak $z_n \neq z_0$ pro $\forall n$.
Hromadné body množiny M značíme $\operatorname{der} M$.

Příklady. ① $\operatorname{der} \mathbb{Q} = \mathbb{R}$
② konečná množina nemá hromadné body
③ množina $\{1/n : \ n \in \mathbb{N}\}$ má jediný hromadný bod: 0

Lemma 23.5. Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$ a nechť z_0 je hromadný bod množiny $N = \{\zeta : \ f(\zeta) = 0\}$. Potom $f(z) = 0$ v $U(z_0, R)$.

Věta 23.17. [O jednoznačnosti.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$, kde Ω je otevřená, souvislá množina. Nechť $N = \{\zeta : \ f(\zeta) = 0\}$ má v Ω alespoň jeden hromadný bod. Potom $f(z) = 0$ v Ω.

Důsledek. Nechť $f_1(z)$, $f_2(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, a $f_1(x) = f_2(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$. Potom nutně $f_1(z) = f_2(z)$ pro $\forall z \in \mathbb{C}$.