21. Fourierovy řady

Def. Řada funkcí $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$ (T)

kde $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, se nazývá trigonometrická řada.

Pozn. součet (T) je 2π-per.
opačně: $f(x)$ 2π-per. $\overset{?}{\Rightarrow} \exists (T)$ jejímž součtem je $f(x)$

Lemma 21.1. (i) $\int_0^{2\pi} \sin nx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx = 0 \quad \forall n \neq 0$ celé

(ii) $\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0 \quad \forall m, n$ celé

(iii) $\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \begin{cases} 0; & m \neq n \text{ celé} \\ \pi; & m = n \geq 1 \end{cases}$

Pozn. L 21.1.: $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\}$
je ortogonální (OG) vůči skal. součinu
$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) \, dx$

Dk. (i) d.cv. $= \frac{1}{n}[\cos nx]_0^{2\pi} = 0 \quad \vee \quad = -\frac{1}{n}[\sin nx]_0^{2\pi}$

(ii) $\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(n+m)x + \sin(n-m)x \, dx \overset{(i)}{=} 0$

(iii) $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(n-m)x}_{\substack{2\pi \;\; m=n \\ 0 \;\; m\neq n}} - \underbrace{\cos(n+m)x \, dx}_{n+m \neq 0}$

Věta 21.1. Nechť (T) konverguje stejnoměrně v $[0, 2\pi]$,
Nechť $f(x)$ je její součet. Potom

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx \; ; \quad (F.k) \begin{cases} a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx \\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx \end{cases} \quad k \geq 1 \text{ celé}$$

DK. $\quad s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [\dots] \rightrightarrows f(x)$ v $[0, 2\pi]$

a také $\quad s_n(x)\cdot \sin lx \rightrightarrows f(x)\cdot \sin lx$

a tudíž $\quad \underbrace{\int_0^{2\pi} s_n(x) \sin l(x)\, dx}_{} \to \int_0^{2\pi} f(x) \sin l(x)\, dx$

$$I_n = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos kx + b_k \sin kx \right] \right) \sin lx \, dx$$

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \sin lx \, dx + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos kx \sin lx \, dx}_{=0} + b_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin kx \sin lx \, dx}_{\begin{cases} 0; & k \neq l \\ \pi; & k = l \end{cases}} \right)$$

tj. $\quad I_n = \begin{cases} 0; & n < l \\ b_l \pi; & n \geq l \end{cases}$

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \pi b_l = \int_0^{2\pi} f(x) \sin lx \, dx$$

Def. : $L^p_{per}(0, 2\pi) = \{ f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, měřitelné, 2π-per. a $\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx < \infty \}$

Nechť $f(x) \in L^1_{per}(0, 2\pi)$

Potom čísla (F. l.) se nazývají Fourierovy koeficienty funkce $f(x)$.

Dále definujeme Fourierovu řadu funkce $f(x)$

$$F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos kx + b_k \sin kx \right]$$

a její ~~číselný~~ částečný součet

$$F_{f,n}(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos kx + b_k \sin kx \right]$$

$$b_k \cancel{a_k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx \qquad a_k \cancel{b_k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx$$

Poznámka $f(x) \dots 2\pi$-per. : $\int_0^{2\pi} f = \int_a^{a+2\pi} f \quad \forall a \in \mathbb{R}$

f sudá $\Rightarrow b_k = 0$; $b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\overset{\text{sudá}}{f(x)} \overset{\text{lichá}}{\sin kx}}_{\text{lichá}} dx = 0$

lichá $\Rightarrow a_k = 0$;

Lemma 21.2. [Komplexní tvar F. ř.]

Nechť $f \in L^1_{per}(0, 2\pi)$

Nechť
$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \, ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

Potom platí
$$c_0 = \frac{a_0}{2} \; ; \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - i b_k) ; \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + i b_k)$$
$k \geq 1$ celé

respektive $a_0 = 2c$; $a_k = c_k + c_{-k}$; $b_k = i(c_k - c_{-k})$

$k \geq 1$ celé

Dále platí
$$F_{f,n}(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \; ; \text{ a (formálně) } F_f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

DK: $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) [\cos(-kx) + i \sin(-kx)] \, dx \qquad k \geq 1 \text{ celé}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\Big(\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx}_{a_k} - i \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx}_{b_k}\Big) \qquad f(x) \in \mathbb{R} \; !!$$

c_{-k} analogicky

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = c_0 + \sum_{k=1}^{n}\Big[c_k e^{ikx} + \underbrace{c_{-k} e^{-ikx}}_{\overline{c_k e^{ikx}}}\Big] \qquad c_{-k} = \overline{c_k}$$
$$= c_0 + \sum_{k=1}^{n} 2 \operatorname{Re}(c_k e^{ikx})$$

$$c_k e^{ikx} = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)\cdot(\cos kx + i\sin kx)$$
$$\mathrm{Re}(\quad) = \frac{1}{2}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Lemma 21.3. [Integrální # až jindy

Def: Funkci $f(x)$ nazveme po částech spojitou v (a,b), jestliže ex. body $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ takové, že $f \in C((x_i, x_{i+1}))$; $i = 0, \dots, n-1$ a dále existují jednostranné vlastní limity v bodech x_i
(Pozn. $f(x_i)$ nemusí být definována)

Funkce $f(x)$ se nazve po částech C^1, jsou-li $f(x)$, $f'(x)$ po částech spojité.

Příkl. ① $f(x) = \mathrm{sgn}(x) \dots$ po částech C^1 $f(0\pm) = \pm 1$
$f'(0\pm) = 0$

není spojitá

② $f(x) = |x| \dots$ spojitá, po částech C^1, není C^1

③ $f(x) = \sqrt[3]{x}$; spojitá, není po částech C^1

$$f' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Věta 21.2. [O konvergenci F. ř.]
Nechť $f(x) \in L^1_{per}(0, 2\pi)$
Nechť $f(x)$ je po částech C^1 na $(a,b) \subset \mathbb{R}$
Potom pro $\forall\, x \in (a,b)$ platí

$$F_f(x) = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{f(x+)}_{\lim_{y \to x+} f(y)} + f(x-)\Big];\ \text{speciálně } F_f(x) = f(x) \text{ v bodech spojitosti}$$

Poznámka: ad rovnost $F_f(x) = f(x)$ (*)
(i) $\exists\, f \in L^1_{per}(0, 2\pi)$ tak, že (*) neplatí nikde
(ii) $f \in L^2_{per}(0, 2\pi) \Rightarrow$ platí skoro všude (Carleson 1960)

(iii) $f \in C \Rightarrow f \in L^2 \Rightarrow (*)$ platí s.v.

avšak stále $(*)$ může neplatit pro nekonečně x

(iv) $f \in C$ a navíc po částech $C^1 \Rightarrow (*)$ platí všude

(spec. případ V.21.2.)

Lemma 21.3. [Integrální tvar F. ř.]

Nechť $f(x) \in L^1_{per}(0, 2\pi)$

Potom
$$F_{f,n}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\, D_n(z)\, dz \;;\; D_n(z) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2\sin\frac{z}{2}} \quad n \geq 1$$

(Dirichletovo integrační jádro)

DK
$$F_{f,n}(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\, e^{-iky}\, dy\right) e^{ikx}$$

x pevné
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\left[\frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-y)}\right] dy$$

subst. $y = x+z$

$dy = dz$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \underbrace{\left[\frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{-ikz}\right]}_{D_n(z)} dz$$

$$D_n(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}\left[\underset{\text{sudé}}{\cos(-kz)} - \underset{\text{liché}}{i\sin(kz)}\right] = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kz$$

(příspěvky se vyruší)

trik: $\sin\frac{z}{2}\cdot D_n(z) = \frac{1}{2}\sin\frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sin\frac{z}{2}\cdot\cos kz}_{\frac{1}{2}\left[\sin(k+\frac{1}{2})z - \sin(k-\frac{1}{2})z\right]}$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\beta-\alpha)\right]$

$\Rightarrow$ „teleskopická suma": $\cancel{\frac{1}{2}\sin\frac{z}{2}} + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{3}{2}z - \cancel{\sin\frac{z}{2}}\right) + \dots + \frac{1}{2}\left(\sin(n+\frac{1}{2})z - \cancel{\sin(n-\frac{1}{2})z}\right)$

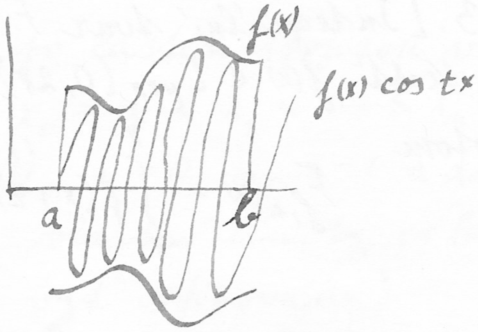
$$\sin\frac{z}{2}\, D_n(z) = \frac{1}{2}\sin(n+\frac{1}{2})z$$

$\Rightarrow$ závěr $\forall z \neq 2m\pi \,;\, m \in \mathbb{Z}$

Lemma 21.4. [Riemann - Lebesgue]

Nechť $f(x) \in L^1(a,b)$

Potom $\int_a^b f(x)\sin tx\,dx\,,\ \int_a^b f(x)\cos tx\,dx \longrightarrow 0\ ;\ t \to \infty$



DK: 1. krok: $f \equiv c$ v (a,b)

$$\int_a^b f(x)\cos tx\,dx = \int_a^b c\cdot\cos tx\,dx = \left[c\cdot\frac{\sin tx}{t}\right]_{x=a}^b$$

$$= \frac{c}{t}\underbrace{\left(\sin tb - \sin ta\right)}_{|\ |\le 2} \longrightarrow 0\ ;\ t\to\infty$$

2. krok: f spojitá v $[a,b]$ $\Rightarrow$ (Lemma 1. sem.) f stejnoměrně spojitá

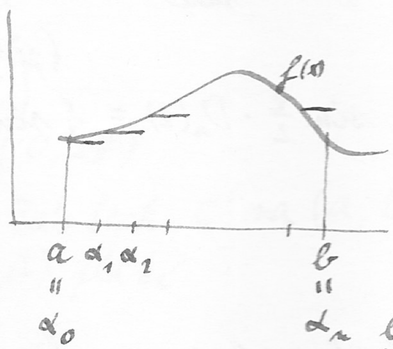
$(\forall \eta > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x,y \in [a,b])\ [|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \eta]$

$\varepsilon > 0$ dáno: volme $\eta = \frac{\varepsilon}{b-a}$ ... $\to \delta > 0$

po částech konstantní aproximace: $g(x) = f(\alpha_i)\ ;\ x \in [\alpha_i, \alpha_{i+1})$

požadujeme

$|\alpha_{i+1} - \alpha_i| < \delta$



$$\int_a^b f(x)\cos tx\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\cos tx\,dx + \int_a^b g(x)\cos tx\,dx$$

$\pm g(x)$ $\qquad =: I_1 + I_2$

$$|I_1| \le \int_a^b \underbrace{|f(x)-g(x)|}_{\text{BÚNO}} \cdot \underbrace{|\cos tx|}_{\le 1}\,dx \le (b-a)\cdot\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

$x \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$

$= |f(x) - f(\alpha_i)| < \eta = \frac{\varepsilon}{b-a}$

$|x - \alpha_i| < \delta$

$$I_2 = \int_a^b g(x)\cos tx = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(\alpha_i)\cdot \cos tx\,dx}_{\to 0\,;\ t\to\infty \ \text{(1. krok)}}$$

$\Rightarrow I_2 < \varepsilon$ pro $t \geq t_0$

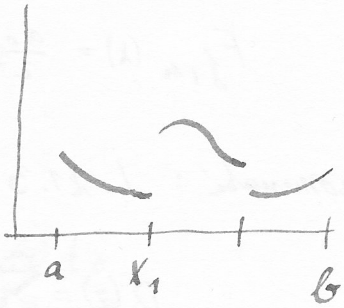
a tedy $\left|\int_a^b f(x)\cos tx\,dx\right| < 2\varepsilon\,;\ t \geq t_0$

3. Krok

$\exists\ x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$

f spoj v (x_i, x_{i+1}) ; $i = 0, \ldots n-1$

$\exists$ konečné $\lim\limits_{x\to x_i \pm}$



$$\int_a^b f(x)\cos tx\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\cos tx\,dx}_{I_i}$$ | ?? $I_i \to 0\,;\ t\to\infty$

výpočet I_i : definuj $f(x_i) = \lim\limits_{x\to x_i+} f(x)$

$f(x_{i+1}) = \lim\limits_{x\to x_{i+1}-} f(x)$

nemění I_i ... f spojitá v $[x_i, x_{i+1}]$

a tedy $I_i \to 0\,;\ t\to\infty$ díky kroku 2

4. Krok $f \in L^1_{per}(a,b)$: Věta o hustotě C v L^1

$\forall f \in L^1(a,b)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \tilde{f} \in C([a,b])$:

$\int_a^b |f(x) - \tilde{f}(x)|\,dx < \varepsilon$ } bez DK

$f \in L^1(a,b)$, $\varepsilon > 0$ dáno

$\Rightarrow\ \exists\ \tilde{f} \in C([a,b])\ ;\ \int_a^b |f - \tilde{f}| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\int_a^b f(x)\cos tx\,dx = \underbrace{\int_a^b (f(x) - \tilde{f}(x))\cos tx\,dx}_{\leq \int_a^b |\ | < \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\int_a^b \tilde{f}(x)\cos tx\,dx}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ pro } t \text{ velké (bod 2)}}$$

Důsledek: $f \in L^1_{per}(0,2\pi) \Rightarrow$ Four. ř. $a_k, b_k \to 0$; $k \to \infty$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx \qquad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx \qquad k \geq 1$$

$$F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos kx + b_k \sin kx\right]$$

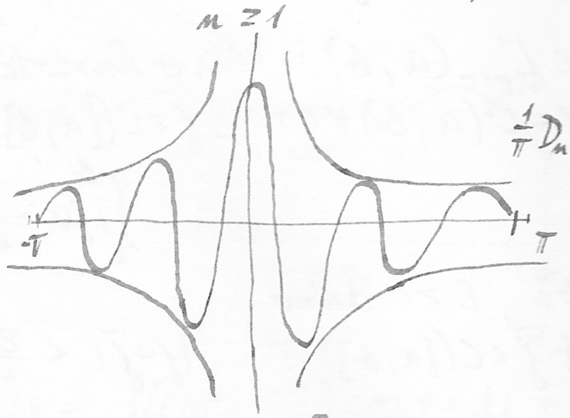
$$F_{f,n}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \dots$$

Připomenutí: L 21.3.: $\forall n \geq 1$: $F_{f,n}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) D_n(z)\,dz$

$$D_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2} e^{ikx} = \begin{cases} \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2\sin\frac{z}{2}} & ; z \not\equiv 2\pi \\ n+\frac{1}{2} & ; z \equiv 2\pi \end{cases}$$

Dirichletovo jádro:
- C^∞; 2π-per
- sudá
- $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n = 1$ vol $f \equiv 1$: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 1 = 2$; $a_k, b_k = 0 \;\forall k \geq 1$ (L 21.1)

$$F_{f,n} = \frac{a_0}{2} = 1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot D_n$$



$\frac{1}{\pi} D_n \to \delta_0 \quad n \to \infty$

Věta 21.3. [Riemanova o lokalisaci]
Nechť $f(x) \in L^1_{per}(0,2\pi)$
Nechť $A \in \mathbb{R}$; $\delta \in (0,2\pi)$
Potom je ekvivalentní:

(i) $F_{f,n}(x) \to A \quad , \quad n \to \infty \quad (F_f(x) = A)$

(ii) $\int_0^\delta [f(x+z) + \underbrace{f(x-z)}_{-2A}] D_n(z)\, dz \to 0 \quad , \quad n \to \infty$

kde D_n je Dirichletovo jádro

DK : L 21.3. :

$$F_{f,n}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) D_n(z)\, dz =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x+z) D_n(z) + f(x-z) D_n(z)\, dz$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+z) + f(x-z)] D_n(z)\, dz$$

$$F_{f,n}(x) - A = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+z) + f(x-z) - 2A] D_n(z)\, dz$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n = 1/2$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \dots + \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \dots = I_1 + I_2$$

tvrdíme : $I_2 \to 0 \ ; \ n \to \infty$ (z toho $\Rightarrow F_{f,n}(x) \to A \Leftrightarrow I_1 = 0$)

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \underbrace{[f(x+z) + f(x-z) - 2A] \cdot \frac{1}{2 \sin \frac{z}{2}}}_{h(z)} \cdot \sin(n + \tfrac{1}{2}) z$$

stačí $h(z) \in L^1(\delta, \pi)$: čitatel $\in L^1(\delta, \pi)$; $\frac{1}{2\sin\frac{z}{2}}$ ... spojitá ; $\leq \frac{1}{2 \sin \frac{\delta}{2}}$ $\Bigg\} \Rightarrow I_2 \to 0$, $n \to \infty$, L 21.4.

Důsledek : I_1 (a tedy $F_f(x)$) závisí jen na hodnotách f na intervalu $(x-\delta, x+\delta)$; $\delta > 0$ pevné

$\times$ a_k, b_k závisí na hodnotě f na celém $(0, 2\pi)$

Věta 21.2. [O konvergenci F. ř.]

Nechť $f(x) \in L^1_{per}(0, 2\pi)$, navíc po částech C^1 v (a, b)

Potom

$$\lim_{n\to\infty} F_{f,n}(x) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] \ ; \ \text{pro} \ \forall x \in (a, b)$$

DK: V. 21.3. ... stačí: $\int_0^\delta [f(x+z)+f(x-z)-f(x+)-f(x-)] D_n(z)\,dz \to 0,\ n\to\infty$

pro nějaké $\delta\in(0,\pi)$ pevné

$$= \int_0^\delta \underbrace{\left[\frac{f(x+z)-f(x+)}{z} + \frac{f(x-z)-f(x-)}{z}\right]\cdot\frac{z}{2\sin\frac{z}{2}}}_{h(z)} \cdot \sin(n+\tfrac{1}{2})z\,dz$$

cíl: $h(z)$ po částech spojitá $v\ (0,\delta) \to$ závěr díky L.21.4.

$x\in(a,b)$ pevné

$\pi>\delta>0$ malé: $(x-\delta, x+\delta)\subset(a,b) \Rightarrow h(z)$ spoj. $v\ (0,\delta)$

$\sim 0+$: $\exists$ vlastní $\lim_{z\to 0+} h(z)$

$\frac{z}{2\sin\frac{z}{2}}$ ... OK $\qquad \frac{f(x+z)-f(x+)}{z}$ ... $\frac{f'(x+z)}{1} \to f'(x+)$

$z\to 0+$: typ $\frac{0}{0}$: l'Hosp.

limita $\exists$ dle předpokladů

Věta 21.4. [Parsevalova rovnost*]

Nechť $f\in L^2_{per}(0,2\pi)$

Potom platí: (1) $\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}|F_{f,n}(x)-f(x)|^2\,dx = 0$

$*$ (2) $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,dx = \frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k^2+b_k^2]$

pozn.: $f\in L^2_{per}(0,2\pi)$: f měřitelná, 2π-per., $\int_0^{2\pi}|f|^2<\infty$

(1): $F_{f,n}\to f\ v\ L^2(0,2\pi)$;

(2): „Pythagorova věta": $\|v\|^2=\sum v_i^2$

DK: pozn. $|\ |^2 = (\ )^2$ ... $f(x), F_{f,n}(x)\in\mathbb{R}$

$F_{f,n}(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}[a_k\cos kx + b_k\sin kx] =: f_n(x)$

$$0\le \int_0^{2\pi}(f_n(x)-f(x))^2\,dx = \underbrace{\int_0^{2\pi} f_n^2}_{A_n} - 2\underbrace{\int_0^{2\pi} f_n\cdot f}_{B_n} + \int_0^{2\pi} f^2$$

$$B_n = \int_0^{2\pi} f\cdot f_n = \underbrace{\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\frac{a_0}{2}}_{\frac{a_0}{2}\cdot\pi a_0} + \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\int_0^{2\pi} f(x)a_k\cos kx\,dx}_{a_k\cdot\pi a_k} + \underbrace{\int_0^{2\pi} f(x)b_k\sin kx\,dx}_{b_k\cdot\pi b_k}$$

$$B_n = \pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}[a_k^2+b_k^2]\right)$$

$$A_n = \int_0^{2\pi} f_n \cdot f_n = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}[a_k \cos kx + b_k \sin kx]\right)\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}[\dots]\right) =$$

$$= \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 \int_0^{2\pi} 1\,dx + \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \sum_{k=1}^{n} \cancel{[a_k \cos kx + b_k \sin kx]}\,dx +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \sum_{k=1}^{n} \cancel{[a_k \cos kx + b_k \sin kx]}\,dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \Big\{ \underbrace{\int_0^{2\pi} a_k a_l \cos kx \cos lx\,dx}_{= a_k^2 \cdot \pi;\ k=l;\ 0 \text{ jinak}} + \overset{\text{Lemma}}{\cancel{\int_0^{2\pi} a_k b_l \cos kx \sin lx\,dx}} +$$

$$+ \cancel{\int_0^{2\pi} b_k a_l \sin kx \cos lx\,dx} + \underbrace{\int_0^{2\pi} b_k b_l \sin kx \sin lx\,dx}_{= b_k^2 \cdot \pi\ k=l\ ;\ 0 \text{ jinak}} \Big\}$$

$$A_n = \frac{a_0^2}{2}\pi + \pi \sum_{k=1}^{n}[a_k^2 + b_k^2] = B_n$$

$$0 \le \int_0^{2\pi} |F_{f,n}(x) - f(x)|^2 dx = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}[a_k^2 + b_k^2]\right)$$

$$\boxed{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}[a_k^2 + b_k^2] \le \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx}$$

$n \to \infty$: ve (2) platí „$\ge$", pozoruji : $(1) \Leftrightarrow (2)$

Pozn. : $f \in L^1 \Rightarrow a_k, b_k \to 0\ ;\ k \to \infty$

$f \in L^2 \Rightarrow \sum a_k^2 + b_k^2$ konv.

hladkost $f \longleftrightarrow$ rychlost poklesu a_k, b_k

Věta 21.5. Nechť $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos kx + b_k \sin kx]$

Nechť $\exists\, C > 0$, $N \ge 0$ celé tak, že $|a_k| + |b_k| \le \frac{C}{k^{N+2}}$

Pak $f \in C^N(\mathbb{R})$ tj. $f, f', \dots, f^{(N)}$ jsou spojité v $\mathbb{R}$

Dk : $N = 0$: $|f_k(x)| \le |a_k| \cdot \underbrace{|\cos kx|}_{\le 1} + |b_k| \cdot \underbrace{|\sin kx|}_{\le 1} \le \frac{C}{k^2}$

$\sum \frac{1}{k^2}$ konv. $\xrightarrow[\substack{V\,15.9.\\ \text{Weierstrass}}]{}$ $\sum f_k(x)$ konv. abs. stejn. v $\mathbb{R}$

$f_k(x)$ spojitá $\xrightarrow[V.\,15.13.]{}$ $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ spoj. $\Rightarrow f(x)$ spoj. v $\mathbb{R}$

neboli C^0

$N = 1$: $|f_k(x)| \le |a_k| + |b_k| \le \frac{C}{k^3}, \dots f(x)$ spoj. v $\mathbb{R}$

$f_k'(x) = -k a_k \sin kx + k b_k \cos kx$

$|f_k'(x)| \le k|a_k| + k|b_k| \le \frac{C}{k^2} \dots \to \sum_k f_k'$ konv. stejn. v $\mathbb{R}$

$\sum f_k(x)$ konv.
$\sum f_k'(x)$ konv. stejn. $\Big\} \xrightarrow[v.15.15.]{} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$

$\Rightarrow f(x)$ je diferencovatelná a $f'(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)}_{\text{spojitá funkce}}$

f_k spojité

N.. obecné: ...

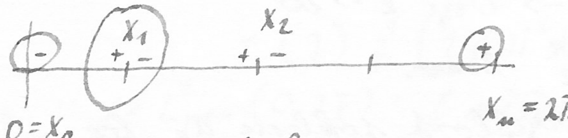
Věta 21.6. Nechť $f \in C^N(\mathbb{R})$, 2π-per., navíc
Nechť $f^{(N+1)}, f^{(N+2)}$ jsou po částech spojité
Potom Four. koef. funkce f splňují
$|a_k| + |b_k| \le \frac{c}{k^{N+2}}$; $k = 1, 2, \dots$ pro vhodné $c > 0$

DK: f spojitá; f', f'' po částech spojité $\to$ společné body nespojitosti
$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 2\pi$ ... dělicí body

$$\pi a_k = \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \underbrace{\cos kx}_{g'(x)} \, dx =$$

$$= \sum_{\cancel{k}\, i=0}^{n-1} \left[f(x) \frac{\sin kx}{k} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} - \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x) \sin kx \, dx$$

klíčové pozorování: 1. suma je teleskopická a $= 0$



$f(x) \frac{\sin kx}{k}$ spojitá v $\mathbb{R}$: lim stejné : vyruší se
$\pm$ krajní body se vyruší : 2π-per.

$$\pi a_k = \frac{1}{k} \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x) \sin kx \, dx}_{P_i}$$

$$P_i = \underbrace{\left[-f'(x) \frac{\cos kx}{k} \right]_{x_i}^{x_{i+1}}}_{\frac{1}{k} \cdot \left(\text{rozdíl konečných limit}\right)} + \underbrace{\frac{1}{k^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f''(x) \cos kx \, dx}_{f'' \dots \text{ omezená}}$$

$N \ge 1$ obecné: $\pi a_k = \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx = \underbrace{\left[f(x) \sin kx \right]_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{k}}_{0 \text{ díky } 2\pi\text{-per.}} - \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} f'(x) \sin kx \, dx$

po N krocích: $\pi a_k = \frac{\pm 1}{k^N} \int_0^{2\pi} f^{(N)}(x) {\cos \atop \sin} kx \, dx$;
$|\text{integrál}| \le \frac{c}{k^2}$ dle kroku 1 ($N = 0$)

Důsledek: $f \in C^N \setminus C^{N+1} \Leftrightarrow |a_k| + |b_k| \sim \frac{1}{k^{N+2}}$

Opakování: po částech spojitá funkce: $\Rightarrow$ omezenost!
- je to silnější pojem než spojitost
- implikuje omezenost

Věta 21.7. [Integrace F. ř.]
Nechť f je po částech spojitá, 2π-per.
Nechť a_k, b_k jsou její Four. k.
Potom pro $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$\int_0^x f(t)\,dt - \frac{a_0}{2}x = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{b_k}{k}\cos kx + \frac{a_k}{k}\sin kx\right]$$

kde $\frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$

Pozn. $\underbrace{f(x) = F_f(x)}_{\text{obecně neplatí}} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos kx + b_k \sin kx\right]$ (ale k důkazu by stačilo, integrál není tak citlivý na to, když někdy něco neplatí)

DK: $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt - \frac{a_0}{2}x$

F ... 2π-per.: $F(x+2\pi) = \int_0^{x+2\pi} f - \frac{a_0}{2}(x+2\pi) = F(x) + \underbrace{\int_x^{x+2\pi} f - \pi a_0}_{=0}$

F ... spojitá: f po částech spoj. $\Rightarrow |f| \le C \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$|F(x) - F(y)| \le \left|\int_x^y f\right| + \left|\frac{a_0}{2}(x-y)\right| \le C\cdot|x-y| + \frac{|a_0|}{2}|x-y|$$

F' je po částech spojitá: $F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$ v bodech spojitosti $f(x)$

$\}$ V. 21.2.: $F(x) = F_F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k \cos kx + B_k \sin kx\right]$ $\forall x \in \mathbb{R}$

A_k, B_k ... Four. k. fce $F(x)$

A_0 ...

$$\pi A_k = \int_0^{2\pi} F(x)\underbrace{\cos kx}_{G'(x)}\,dx \overset{*}{=} \left[F(x)\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{k}\underbrace{\int_0^{2\pi}\left(f(x) - \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{0:\,L.21.1.}\right)\sin kx\,dx}_{\pi b_k}$$

$G(x) = \frac{\sin kx}{k}$

$*$ per partes: nutnost existence derivací všude, pokud se integrace provede pečlivě, vyjde to stejně

$A_k = -\frac{b_k}{k}$; podobně $B_k = \frac{a_k}{k}$

volme $x = 0$: $F(0) = 0 = \frac{A_0}{2} + \left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}\right)$

22. Abstraktní Fourierovy řady

Def: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevř., $p \in [1, \infty)$

$L^p(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{C}$, měřitelné, $\int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \}$

$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f|^p \, dx \right)^{1/p}$ el-pé integrovatelné fce

$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{C}$, měřitelné; $\exists c > 0 \ |f(x) \le c|$ s.v.$\}$

$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ c > 0 ; |f(x)| \le C$ s.v.$\}$

esenciálně omezené

Lemma 22.1. [Youngova ner.]

Nechť $p, q \in (1, \infty)$ splňují

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

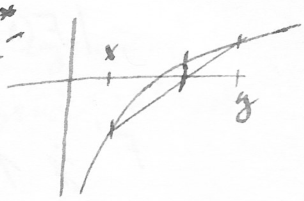
Potom pro $\forall\, a, b \ge 0$ je

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Pozn. $p = q = 2 \Rightarrow ab \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$

Dk: (i) $a = 0 \lor b = 0 \to LS = 0 \ldots$ OK

(ii) $a, b > 0 \ldots \ln(x)$ rostoucí, konkávní*



$*$: $\ln(\alpha \cdot x + (1-\alpha) y) \ge \alpha \ln x + (1-\alpha) \ln y$

$\forall x, y > 0 ; \alpha \in [0, 1]$

volme $\alpha = \frac{1}{p}$, $1 - \alpha = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$

$x = a^p$, $y = b^q$

dosazením : $\ln\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q\right) \ge \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) =$

ln: rostoucí $\qquad = \ln(ab)$

Lemma 22.2 [Hölderova ner.]

Nechť $p, q \in (1, \infty)$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (Hölderovy sdružené exponenty)

Nechť $u(x), v(x) : \Omega \to \mathbb{R}^*$ měřitelné

Potom $\int_\Omega |uv| \le \left(\int_\Omega |u|^p \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |v|^q \right)^{1/q}$