$A_k = -\frac{b_k}{k}$; podobně $B_k = \frac{a_k}{k}$

volme $x = 0$: $F(0) = 0 = \frac{A_0}{2} + \left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}\right)$

22. Abstraktní Fourierovy řady

Def: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevř. , $p \in [1, \infty)$

$L^p(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{C}$, měřitelné, $\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \}$

$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{1/p}$ el-pé integrovatelné fce

$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{C}$, měřitelné; $\exists C > 0 \; |f(x)| \le C$ s.v.$\}$

$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ C > 0 ; |f(x)| \le C$ s.v.$\}$

esenciálně omezené

Lemma 22.1. [Youngova ner.]

Nechť $p, q \in (1, \infty)$ splňují

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

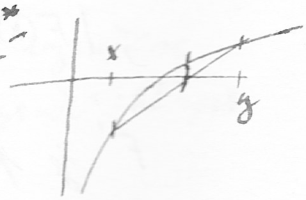
Potom pro $\forall\, a, b \ge 0$ je

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Pozn. $p = q = 2 \Rightarrow ab \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$

Dk: (i) $a = 0 \vee b = 0 \to LS = 0$ ... OK

(ii) $a, b > 0$ ... $\ln(x)$ rostoucí, konkávní*



*: $\ln(\alpha \cdot x + (1-\alpha) y) \ge \alpha \ln x + (1-\alpha) \ln y$

$\forall x, y > 0 ; \alpha \in [0, 1]$

volme $\alpha = \frac{1}{p}$, $1 - \alpha = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$

$x = a^p$, $y = b^q$

dosazením : $\ln\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q\right) \ge \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) =$

ln: rostoucí $= \ln(ab)$

Lemma 22.2 [Hölderova ner.]

Nechť $p, q \in (1, \infty)$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (Hölderovy sdružené exponenty)

Nechť $u(x), v(x) : \Omega \to \mathbb{R}^*$ měřitelné

Potom $\int_\Omega |uv| \le \left(\int_\Omega |u|^p \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |v|^q \right)^{1/q}$

DK: (i) $\int_\Omega |u|^p = 0 \overset{V.18.?}{\Longrightarrow} u = 0$ s. v.

$uv = 0$ s. v. (úmluva $0 \cdot \infty = 0$)

$LS = 0 \ldots OK$

podobně pro $\int_\Omega |v|^q = 0$

(ii) $\int_\Omega |u|^p > 0$, $\int_\Omega |v|^q = \infty$: $PS = \infty \ldots OK$

(iii) $\int_\Omega |u|^p, \int_\Omega |v|^q \in (0, \infty)$

L. 22.1.: $a = \frac{|u(x)|}{\left(\int_\Omega |u|^p\right)^{1/p}}$

$b = \frac{|v(x)|}{\left(\int_\Omega |v|^q\right)^{1/q}}$

$$\frac{|u(x)\, v(x)|}{\left(\int_\Omega |u|^p\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |v|^q\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|u(x)|^p}{\int_\Omega |u|^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|v(x)|^q}{\int_\Omega |v|^q}$$

platí pokud $|u(x)|, |v(x)| < \infty \ldots$ skoro všude

(neboť $\int |u|^p, \int |v|^q < \infty$)

$\int_\Omega dx$: $\frac{\int_\Omega |uv|}{\left(\int_\Omega |u|^p\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |v|^q\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \frac{\cancel{\int_\Omega |u|^p}}{\cancel{\int_\Omega |u|^p}} + \frac{1}{q} \frac{\cancel{\int_\Omega |v|^q}}{\cancel{\int_\Omega |v|^q}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Lemma 22.3 [Minkowského ner.]

Nechť $p \in (1, \infty)$; $f(x), g(x) : \Omega \to \mathbb{R}^*$ měřitelné

Potom

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g|^p\right)^{1/p}$$

DK: $\int_\Omega |f+g|^p = \int_\Omega |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} \leq \underbrace{\int_\Omega |f| \cdot |f+g|^{p-1}}_{I_1} + \underbrace{\int_\Omega |g| \cdot |f+g|^{p-1}}_{I_2}$

$I_1 = \int_\Omega |f| \cdot |f+g|^{p-1}$ L. 22.2. $u = |f|$; $p = p$

$v = |f+g|^{p-1}$; q dopočítu

$I_1 \leq \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |f+g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{1-\frac{1}{p}}$ $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$

$\Rightarrow q = \frac{p}{p-1}$

analogicky pro I_2

$$\int_\Omega |f+g|^p \le \underbrace{\left(\int_\Omega |f+g|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}}_{\text{tímto vydělíme : } \to \text{ závěr}^*} \cdot \left\{ \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g|^p\right)^{1/p} \right\}$$

* diskuse: $\int_\Omega |f+g|^p = 0$ ... Lemma OK

$\int_\Omega |f+g|^p = \infty$ ... nutně** $\int_\Omega |f|^p = \infty$

nebo $\int_\Omega |g|^p = \infty$

Lemma OK

** obratem: $f, g \in L^p(\Omega) \Rightarrow f+g \in L^p(\Omega)$

Tvrzení: $L^p(\Omega)$ je vektorový prostor a

$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p}$ je norma

$f, g \in L^p(\Omega) \Rightarrow \alpha \cdot f,\ f+g \in L^p(\Omega)$

měřitelnost OK, integrovatelnost: $|a+b|^p \le 2^p(|a|^p + |b|^p)$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ (d.cv.)

$\int_\Omega |f+g|^p \le 2^p \left(\int_\Omega |f|^p + \int_\Omega |g|^p\right)$

norma? (i) $\|f\|_{L^p(\Omega)} = 0 \Rightarrow f = 0$ s.v. $\Rightarrow f$ je nulový prvek vekt. prostoru

úmluva: funkce rovné skoro všude

považuji za totožné

(ii) $\|\alpha \cdot f\|_{L^p(\Omega)} = |\alpha| \cdot \|f\|_{L^p(\Omega)}$ $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ (d.cv.)

(iii) Δ-nerovnost: $p = 1$ (d.cv.)

$p \in (1, \infty)$ ... L.22.3

$p = \infty$ (d.cv.*)

Poznámka: ① Prostor $L^p(\Omega)$ je úplný (cauchyovská posl $\Rightarrow$ konvergentní)

Jarník, I2, Věta 199, str. 545

② Prostor $C_c^\infty(\Omega)$ je hustý v $L^p(\Omega)$ pro $\forall p < \infty$

$(\forall \varepsilon > 0)(\forall f \in L^p(\Omega))(\exists g \in C_c^\infty(\Omega))[\|f-g\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon]$

$C_c^\infty(\Omega)$ ... nekonečně hladké s kompaktním nosičem

$\exists K \subset \Omega$ kompaktní; $g = 0$ vně K

Opakování: $(X, \|\cdot\|)$ ... normovaný vektorový prostor

$\{x_n\} \subset X$ se nazve cauchyovská:

(B.C.) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall m, n \ge n_0)[\|x_n - x_m\| < \varepsilon]$

úplnost: $\{x_n\} \subset X$ cauchyovská $\Rightarrow$ x_n konverguje; tj.
$\exists x_0 \in X$ tak, že $x_n \to x_0$ v X, tj.
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)[\|x_n - x_0\| < \varepsilon]$

Banachův prostor: úplný normovaný vekt. prostor
(např. $\mathbb{R}^n$, $C([a,b])$, $L^p(\Omega)$)

Def: $(X, \|\cdot\|)$ ... norm. vekt. prostor; $x_k \in X$
$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = s$ ... $s = \lim_{n\to\infty} s_n$; $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$
Řada konverguje absolutně: $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$

Věta 22.1. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor; $x_k \in X$
Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$
Potom $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konverguje v X

Dk: cíl: $\exists s \in X$; $s_n \to s$ v X; kde $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$
Banachův prostor $\Rightarrow$ úplnost $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ stačí ověřit (B.C.) pro $\{s_n\}$
$\sum_k \|x_k\|$ splní B.C.-ř.:
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)(\forall p \geq 1)\left[\left|\sum_{k=n}^{n+p} \|x_k\|\right| < \varepsilon\right]$
$\|s_m - s_n\| = \|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon$
BÚNO $m \geq n$ $\quad$ $m := n+p$ $\quad$ Δ-nerovnost

Opakování: skalární součin X ... vektorový prostor
$X \ni x, y \longmapsto \langle x, y\rangle \in \mathbb{C}$
(i) $x \longmapsto \langle x, y\rangle$ lineární ($y \in X$ pevné)
(ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$
(iii) $\langle x, x\rangle \geq 0$ a $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Platí: ① $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ je norma na X
② $|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y,y\rangle} = \|x\| \cdot \|y\|$
Cauchy - Schwarz

Def. Hilbertův prostor: vekt. prostor se skalárním součinem, který je úplný vzhledem k normě
$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

Příkl. ① $L^2(\Omega)$; $\langle f,g\rangle := \int_\Omega f(x)\,\bar{g}(x)\,dx$

L. 22.2 ($p=q=2$):

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_\Omega |f(x)|^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |g(x)|^2\right)^{1/2}$$

② $\mathbb{R}^n$... $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$

Def až za chvilku

Úmluva: Nadále $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ značí Hilbertův prostor $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ příslušná norma.

Lemma 22.4. 1. $x \to \|x\|$ je spojité

2. $x,y \to \langle x,y\rangle$ je spojité

DK. 1. cíl: $x_n \to x_0$ v $H \Rightarrow \|x_n\| \to \|x_0\|$ v $\mathbb{R}$

$(\|x_n - x_0\| \to 0)$

$\|u\| = \|v + (u-v)\| \le \|v\| + \|u-v\|$

$$\left.\begin{aligned} &\|u\| - \|v\| \le \|u-v\| \\ &\|v\| - \|u\| \le \|v-u\| = \|u-v\| \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\pm(\|u\| - \|v\|) \le \|u-v\| \\ &\big|\|u\| - \|v\|\big| \le \|u-v\| \end{aligned}$$

2. cíl: $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ v $H \Rightarrow \langle x_n, y_n\rangle \to \langle x_0, y_0\rangle$ v $\mathbb{C}$

$$\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_0, y_0\rangle = \langle x_n, y_n - y_0\rangle + \langle x_n - x_0, y_0\rangle = P_1 + P_2$$

$\pm\langle x_n, y_0\rangle$

Cauchy-Schwarz: $|P_1| \le \|x_n\|\cdot\|y_n - y_0\| \to \|x_0\|\cdot 0 = 0$

$|P_2| \le \|x_n - x_0\|\cdot\|y_0\| \to 0$

Def: Řekneme, že $\{x_n\} \subset H$ tvoří ortogonální systém (OG), pokud $x_n \ne 0$ a $\langle x_n, x_m\rangle = 0$ $\forall m \ne n$.

Systém je ortonormální (ON) pokud navíc $\|x_n\| = 1$

Příkl. Trigonometrický systém $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\}$ je OG v $L^2(0,2\pi)$. (Viz L.21.1.)

Poznámka: $\{x_n\}$ je OG $\Rightarrow \{\tilde{x}_n\}$, kde $\tilde{x}_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$ je ON

ON trig. systém: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \dots \right\}$

$$\|1\|_{L^2(0,2\pi)} = \left(\int_0^{2\pi} 1\right)^{1/2} = (2\pi)^{1/2}$$

$$\|\sin x\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 x\right)^{1/2} = \pi^{1/2}$$

Klíčový problém: $\{x_n\} \subset H$ je OG systém, $x \in H$ lib.
Lze psát $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$; $c_k \in \mathbb{C}$?

Věta 22.2. $\{x_n\} \subset H$ je OG systém, $c_k \in \mathbb{C}$,
Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ konverguje a má součet $x \in H$.
Potom

$$c_k = \frac{\langle x, x_k \rangle}{\langle x_k, x_k \rangle} \quad \forall k$$

Dk: $s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$; víme $s_n \to x$ v H, $n \to \infty$

L. 22.4. $\langle s_n, x_j \rangle \to \langle x, x_j \rangle$ $\forall j$ pevné

$$\langle s_n, x_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} c_k x_k, x_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \langle x_k, x_j \rangle = \begin{cases} 0 & n < j \\ c_j \langle x_j, x_j \rangle & n \geq j \end{cases}$$

$$\langle s_n, x_j \rangle \to c_j \langle x_j, x_j \rangle$$

Def: Nechť $\mathcal{S} = \{x_n\} \subset H$ je OG systém, nechť $x \in H$.
Řada $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$, kde $c_k = \frac{\langle x, x_k \rangle}{\langle x_k, x_k \rangle}$ se nazývá

Fourierova řada prvku x vzhledem k systému $\mathcal{S}$.
Značíme $F_{x,\mathcal{S}}$. c_k nazveme Fourierovy koeficienty prvku x vůči $\mathcal{S}$.

Věta 22.3 Nechť $\mathcal{S} = \{x_n\} \subset H$ je OG systém, $x \in H$ libovolné pevné, c_k, $F_{x,\mathcal{S}}$ jako výše. Potom

1. $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|x_k\|^2 \leq \|x\|^2$
2. $F_{x,\mathcal{S}}$ konverguje v H
3. $F_{x,\mathcal{S}} = x$ právě když v bodě 1. nastává rovnost

DK: $s_n := \sum_{\ell=1}^{n} c_\ell x_\ell$; $\|x - s_n\|^2 = \langle x - s_n, x - s_n \rangle =$

$= \langle x, x\rangle - \langle x, s_n\rangle - \langle s_n, x\rangle + \langle s_n, s_n\rangle$

$\langle x, s_n\rangle = \langle x, \sum_{\ell=1}^{n} c_\ell x_\ell \rangle = \sum_{\ell=1}^{n} \langle x, c_\ell x_\ell\rangle = \sum_{\ell=1}^{n} \overline{c_\ell} \langle x, x_\ell\rangle =$

$= \sum_{\ell=1}^{n} \underbrace{\overline{c_\ell} c_\ell}_{|c_\ell|^2} \|x_\ell\|^2$

$\langle s_n, x\rangle = \overline{\underbrace{\langle x, s_n\rangle}_{\in \mathbb{R}}} = \langle x, s_n\rangle$

$\langle s_n, s_n\rangle = \langle \sum_{\ell=1}^{n} c_\ell x_\ell, \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rangle = \sum_{j,\ell=1}^{n} \langle c_\ell x_\ell, c_j x_j\rangle =$

$= \sum_{j,\ell=1}^{n} c_\ell \overline{c_j} \underbrace{\langle x_\ell, x_j\rangle}_{=0\ \ell \neq j} = \sum_{\ell=j=1}^{n} |c_\ell|^2 \|x_\ell\|^2$

celkem: $0 \leq \|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\ell=1}^{n} |c_\ell|^2 \|x_\ell\|^2$

tj. $\sum_{\ell=1}^{n} |c_\ell|^2 \|x_\ell\|^2 \leq \|x\|^2 \ \forall n$

$n \to \infty$: 1.

$s_n \to x \Leftrightarrow$ v 1. platí $=$, tj: 3.

zbývá 2.: ? konvergence $F_{x,\mathcal{S}}$: úplnost H : stačí (B.C.-ř.)

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})\left[\left\|\sum_{\ell=n+1}^{n+p} c_\ell x_\ell\right\| < \varepsilon\right]$

víme: $\sum |c_\ell|^2 \|x_\ell\|^2$ konv. v $\mathbb{R}$

$\exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall p \geq 1 \quad \sum_{\ell=n+1}^{n+p} |c_\ell|^2 \|x_\ell\|^2 < \varepsilon^2$

$\left\|\sum_{\ell=n+1}^{n+p} c_\ell x_\ell\right\|^2 = \langle \sum_\ell, \sum_j \rangle = \sum_{\underbrace{\ell=j=n+1}_{\text{ortogonalita } \{x_\ell\}}}^{n+p} |c_\ell|^2 \|x_\ell\|^2 < \varepsilon^2$

Def: OG se nazve úplný (OG systém $\{x_n\} \subset H$) pokud platí: je-li $x \in H$ takové, že $\langle x, x_n\rangle = 0$ pro $\forall n$, pak nutně $x = 0$

Příkl. ① trigonometrický systém je úplný v $L^2(0, 2\pi)$

② OG systém: Legendreovy, Hermitovy polynomy atd. (viz cvičení) jsou úplné v příslušných prostorech

Věta 22.4. $\mathcal{S} = \{x_n\} \subset H$ je OG systém. Potom je ekvivalentní

1. $\mathcal{S}$ je úplný
2. pro $\forall x \in H$ platí $\sum_{\ell=1}^{\infty} |c_\ell|^2 \|x_\ell\|^2 = \|x\|^2$
3. pro $\forall x \in H$ platí $F_{x,\mathcal{S}} = x$

Dk $1 \Rightarrow 3$ $\quad y := F_{x,\mathcal{S}} = \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell x_\ell \; ; \; c_\ell = \frac{\langle x, x_\ell \rangle}{\langle x_\ell, x_\ell \rangle}$

cíl: $y = x$; $s_n = \sum_{\ell=1}^{n} c_\ell x_\ell \to y$; $n \to \infty$

$\langle s_n, x_j \rangle \to \langle y, x_j \rangle$, j pevné

$0, n < j \qquad c_j \langle x_j, x_j \rangle \qquad \langle y, x_j \rangle = \langle x, x_j \rangle$

$n > j \qquad \langle y - x, x_j \rangle = 0 \;\forall j$

úplnost $\mathcal{S}$: $y - x = 0 \Rightarrow y = x$

$3 \Rightarrow 1$ cíl: $x \in H$; $\langle x, x_n \rangle = 0 \;\forall n \Rightarrow x = 0$

víme 3: $x = \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell x_\ell = \sum_{\ell=1}^{\infty} 0 \cdot x_\ell = 0 \in H$, kde $c_\ell = 0 \;\forall \ell$

$2 \Leftrightarrow 3$: $\sum_{\ell=1}^{\infty} |c_\ell|^2 \|x_\ell\|^2 = \|x\|^2 \Leftrightarrow F_{x,\mathcal{S}} = x$ viz V22.3.

Věta 22.5.* [O nejlepší aproximaci]

Nechť $\mathcal{S} = \{x_n\} \subset H$ je OG, $x \in H$ libovolné, c_ℓ Four. koeficienty x vůči $\mathcal{S}$.

Nechť $a_\ell \in \mathbb{C}$ jsou libovolná čísla taková, že $\sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell x_\ell$ konverguje v H.

Potom $\|x - F_{x,\mathcal{S}}\| \leq \|x - \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell x_\ell\|$, rovnost nastává právě když $a_\ell = c_\ell$ pro $\forall \ell$

Dk. spočívá v $\|\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell x_\ell - x\|^2 = \langle \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell x_\ell - x, \sum_{j=1}^{n} a_j x_j - x \rangle =$

$= \langle \sum_{\ell=1}^{n} (a_\ell - c_\ell) x_\ell + \sum_{\ell=1}^{n} c_\ell x_\ell - x, \; \dots \rangle$

$$\|\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell x_\ell - x\|^2 = \|\sum_{\ell=1}^{n} c_\ell x_\ell - x\|^2 + \sum_{\ell=1}^{n} |a_\ell - c_\ell|^2 \|x_\ell\|^2$$

Def: X ... vekt. prostor : báze

algebraická : $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ... LN, $x = \sum_{\ell=1}^{n} c_\ell x_{\alpha_\ell}$ jediným způsobem

Schauderova : $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ~ $x = \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell x_\ell$ pro $\forall x$; jednoznačně konverguje v X (norma)

Hilbertova : úplný OG systém v H (Hilb. prostoru) (spec. případ Schaud. báze)