24. Fourierova transformace

Def: Pro $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definujeme (dopřednou) Fourierovu transformaci

$$[Ff](\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (x,\xi)} f(x)\,dx \; ; \; \xi \in \mathbb{R}^n$$

Definujeme inverzní (zpětnou) F. t.

$$[F_{-1} f](\xi) = \check{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x,\xi)} f(x)\,dx \; ; \; \xi \in \mathbb{R}^n$$

kde (x,ξ) ... skalární součin v $\mathbb{R}^n$

spec $n=1$: $(x,\xi) = x\xi$

Pozn.
- F, F_{-1} přiřadí funkci $f(x)$ opět funkci $\hat{f}(\xi)$, resp. $\check{f}(\xi)$
- definice korektní: $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$: měřitelná; $\int_{\mathbb{R}^n} |f| < \infty$

  $\underbrace{e^{-2\pi i (x,\xi)}}_{\text{spojitá}} f(x)$; $|e^{-2\pi i \cdots}| \le 1$

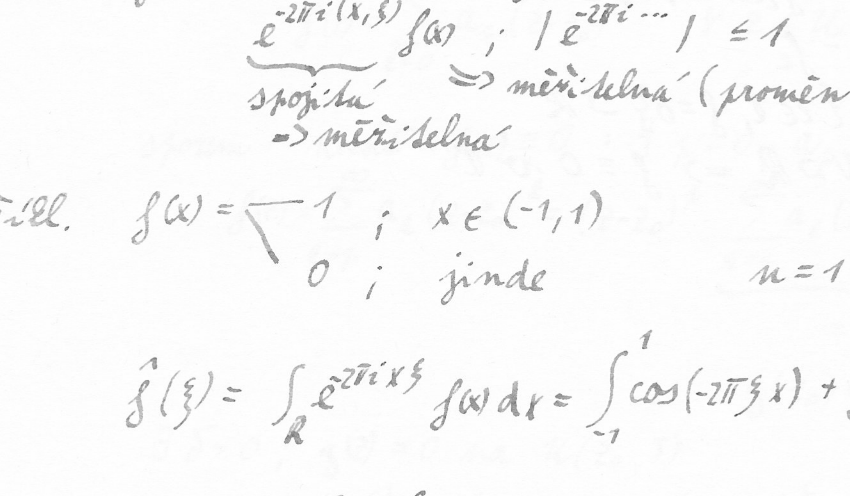
  spojitá $\Rightarrow$ měřitelná (proměnná x), ξ pevné

  $\Rightarrow$ měřitelná

Přikl. $f(x) = \begin{cases} 1 \; ; & x \in (-1,1) \\ 0 \; ; & \text{jinde} \end{cases}$ $\qquad n = 1$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \cos(-2\pi\xi x) + \underbrace{i \sin(2\pi\xi x)}_{0,\ \text{lichá}}\,dx$$

$$= \begin{cases} 2 \; ; & \xi = 0 \\ \left[\dfrac{\sin(-2\pi\xi x)}{-2\pi\xi}\right]_{x=-1}^{x=1} = \dfrac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi} \; ; & \xi \neq 0 \end{cases}$$



pozorujeme: $\left.\begin{array}{l} \hat{f} \text{ spojitá} \\ \hat{f} \to 0,\ |\xi| \to \infty \\ \hat{f} \text{ sudá } (f \text{ sudá}) \end{array}\right\}$ není náhoda

Věta 24.1. Nechť $f(x) \in L^1(R^n)$

Potom

(1) $\check{f}(\xi) = \hat{f}(-\xi)$

(2) $\overline{\check{f}}(\xi) = \hat{\overline{f}}(\xi)$

(3) $\overline{\hat{f}}(\xi) = \check{\overline{f}}(\xi)$

$$\left.\begin{aligned} &(4)\quad \hat{f}(\xi+z) = \left[f(x)\, e^{-2\pi i(x,z)}\right]^\wedge(\xi) \\ &(5)\quad \left[f(x+z)\right]^\wedge(\xi) = e^{2\pi i(\xi,z)}\,\hat{f}(\xi) \end{aligned}\right\} z \in \mathbb{R}^n$$

(6) $\left[f(cx)\right]^\wedge(\xi) = |c|^{-n}\hat{f}(c^{-1}\xi)\ ,\ c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Poznámka: x ... proměnná <u>před</u>

ξ ... proměnná <u>po</u>

Dk: (1), (2), (3) ... d.cv.

(4) $\hat{f}(\xi+z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,\xi+z)} f(x)\,dx =$

$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,\xi)} \cdot e^{-2\pi i(x,z)} f(x)\,dx =$

$= \left[e^{-2\pi i(x,z)} f(x)\right]^\wedge(\xi)$

(5) $\left[f(x+z)\right]^\wedge(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,\xi)} f(x+z)\,dx$ | subst.: $x+z=y$, $x = y-z$, $dx = dy$

$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(y-z,\xi)} f(y)\,dy =$

$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(z,\xi)} e^{-2\pi i(y,\xi)} f(y)\,dy$

(6) $LS = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,\xi)} f(cx)\,dx$ | $cx = y$ subst.: $\varphi: (x_1, \dots, x_n) \mapsto (cx_1, \dots, cx_n)$, $dy = |J\varphi|\,dx$

kde $J\varphi = \det \nabla\varphi = \begin{vmatrix} c & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c \end{vmatrix} = c^n$

tedy $\quad dy = |c^n|\, dx$

pak $LS = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (c^{-1} y, \xi)} f(y)\, |c|^{-n}\, dy =$

$= |c|^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (y, c^{-1}\xi)} f(y)\, dy$

Def: $\quad f(x)$ se nazve radiálně symetrická, pokud $f(x)$ závisí jen na $|x|$.

Ekvivalentně: $\quad f(Qx) = f(x)$, kde Q je otočení kolem libovolné osy p, $0 \in p$

Věta 24.2. Nechť $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ je sudá (resp. lichá, resp. radiálně symetrická).

Pak $\hat{f}(\xi)$ má stejnou vlastnost.

Dk: (lichá)

$\hat{f}(-\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (x, -\xi)} f(x)\, dx \quad \Big| \quad$ subst. $x = -y$, $dx = |J\varphi|\, dy$, $\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, \dots, -x_n)$, $J\varphi = (-1)^n$

vymuší se

$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (-y, -\xi)} f(-y)\, dy = -\hat{f}(\xi)$

(radiálně sym.) $\qquad Q$: lib. otočení

$\hat{f}(Q\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (x, Q\xi)} f(x)\, dx \quad \Big| \quad x = Qy, \quad dx = |\det Q|\, dy$

$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (Qy, Q\xi)} f(Qy)\, dy \cdot \underbrace{|\det Q|}_{=1} = \hat{f}(\xi)$

platí $\det Q = \pm 1$ (souvisí se zachováním objemu)

$(Qa, Qb) = (a, b)$ (zachování úhlu => nemění skal. součin)

Značení (Prostory funkcí)

$L^p(\mathbb{R}^n)$ ... L^p-integrovatelné

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \; ; \quad p \in [1,\infty)$$

$$C(\mathbb{R}^n) = \{ f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \; ; \; f \text{ spojitá} \}$$
$$C_b(\mathbb{R}^n) = \{ f \in C(\mathbb{R}^n) \; ; \; f \text{ omezená} \}$$
$$C_0(\mathbb{R}^n) = \{ f \in C(\mathbb{R}^n) \; ; \; f(x) \to 0 \text{ pro } |x| \to \infty \}$$
$$C_c(\mathbb{R}^n) = \{ f \in C(\mathbb{R}^n) \; ; \; \exists R > 0 : f(x) = 0 \text{ pro } |x| > R \}$$

$\|f\|_C = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$

Poznámka: platí inkluze $C_c \subset C_0 \subset C_b$; $C_c \subset L^p \; \forall p$

ukažme $C_0(\mathbb{R}^n) \subset C_b(\mathbb{R}^n)$?? $f(x) \in C_0$, neomezená

$\exists x_k$; $|f(x_k)| > k$; $k = 1, 2, \dots$

$f \in C_0$: $\exists R$: $|f(x)| < 1$; $|x| > R$

$\Rightarrow |x_k| < R \; \forall k$: $\{x_k\}$ omezená posloupnost $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ podposloupnost $x_k' \to x_0 \in \mathbb{R}^n$

spojitost : $f(x_k') \to f(x_0) \in \mathbb{C}$

a přitom $f(x_k') \to \infty$ spor.

Věta 24.3. $\mathcal{F}$ je spojité, lineární zobrazení z $L^1(\mathbb{R}^n)$ do $C_b(\mathbb{R}^n)$ a platí $\|\mathcal{F}f\|_{C_b} \le \|f\|_{L^1}$

Dk: linearita: $\mathcal{F}[f+g] = \mathcal{F}f + \mathcal{F}g$; $\mathcal{F}[af] = a\mathcal{F}f$

$\Rightarrow$ zjevné

? spojitost: $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{e^{-2\pi i (x,\xi)} f(x)}_{g(\xi,x)} dx$

$g(\xi,x)$ .... závisí na ξ spojitě

... měřitelná vůči x

majoranta : $|g(\xi,x)| \le |f(x)| \in L^1$

(spojitá závislost integrálu na parametru)

? omezenost $\|\hat{f}\|_{C_b} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)| \le \|f\|_{L^1}$

$$|\hat{f}(\xi)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} dx\right| \le \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-2\pi i (x,\xi)} f(x)| \, dx \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, dx$$

? spojitost $\mathcal{F} : L^1 \to C_b \iff f_n \to f$ v $L^1 \Rightarrow \mathcal{F}f_n \to \mathcal{F}f$ v C_b

$$\|\mathcal{F}f_n - \mathcal{F}f\|_{C_b} = \|\mathcal{F}(f_n - f)\|_{C_b} \le \|f_n - f\|_{L^1}$$

Věta 24.4. [F. t. a derivace]

(1) Nechť $f(x) \in L^1 \cap C_0$, nechť $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \cap C$

Potom $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = 2\pi i \, \xi_j \hat{f}(\xi)$

(2) Nechť $f(x), \; x_j f(x) \in L^1$

Potom $\frac{\partial}{\partial \xi_j} \hat{f}(\xi) = [-2\pi i \, x_j f(x)]^{\wedge}(\xi)$

Pozn. derivace $\frac{\partial}{\partial x_j} \xrightarrow{\mathcal{F}}$ násobení $(2\pi i)\xi_j$

násobení $(-2\pi i)\, x_j \xrightarrow{\mathcal{F}}$ derivace $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$

DK BÚNO $j=1$; $\underset{\mathbb{R}^n}{x} = \langle x_1, \underset{\mathbb{R}^{n-1}}{\bar{x}} \rangle$

$f \in C_0 \cap C^1$; $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ pevné

$$0 = \left[e^{-2\pi i (\langle x_1, \bar{x} \rangle, \xi)} f(\langle x_1, \bar{x} \rangle) \right]_{x_1 = -\infty}^{x_1 = \infty}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_1} [\quad] \, dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi i \xi_1) e^{-2\pi i (\langle x_1, \bar{x} \rangle, \xi)} f(\langle x_1, \bar{x} \rangle) \, dx_1 +$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_1}(\langle x_1, \bar{x} \rangle, \xi) = \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j = \xi_1} \quad + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i (\langle x_1, \bar{x} \rangle, \xi)} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\langle x_1, \bar{x} \rangle) \, dx_1$$

nyní $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\bar{x}$; Fubini $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\langle x_1, \bar{x} \rangle) \, dx_1 \right) d\bar{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \, dx$

pak $$0 = -\int_{\mathbb{R}^n} 2\pi i \xi_1 e^{-2\pi i (x, \xi)} f(x) \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (x, \xi)} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \, dx$$

(2) $$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \hat{f}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{e^{-2\pi i (x, \xi)} f(x)}_{g(\xi, x)} \, dx \overset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \xi_j} e^{-2\pi i (x, \xi)}}_{e^{-2\pi i (x, \xi)} \cdot (-2\pi i x_j)} f(x) \, dx$$

ověření (*): $g(\xi, \cdot)$ ... měřitelná

$\exists \frac{\partial}{\partial \xi_j} g$ ... $f(x)$ konečná s.v. $(f \in L^1)$

$\exists \xi_0$; $g(\xi_0, \cdot) \in L^1$: $|g(\xi, x)| \leq |f(x)| \in L^1 \; \forall \xi$

majoranta: $\left| \frac{\partial}{\partial \xi} g \right| = 2\pi |x_j f(x)| \in L^1$, nezáv. na ξ

Přikl. Nechť $u(x), \nabla^2 u(x), \nabla u(x) \in L^1 \cap C_0$

Potom $[\Delta u(x)]^{\wedge}(\xi) = -4\pi^2 (\xi)^2 \hat{u}(\xi)$

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x)\right]^{\wedge}(\xi) = \left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_j}}_{f,\ \text{V.24.4.}}\right)(x)\right]^{\wedge}(\xi) =$$

$$= 2\pi i\, \xi_j \left[\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right]^{\wedge}(\xi) = (2\pi i)^2 \hat{u}(\xi) = -4\pi^2 \xi_j^2 \cdot \hat{u}(\xi); \quad \sum_{j=1}^{n}$$

Aplikace: $-\Delta u + \lambda u = f \quad \Big/ F$

$$4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u} + \lambda \hat{u} = \hat{f}$$

$$\hat{u} = \frac{\hat{f}}{4\pi^2|\xi|^2 + \lambda} \quad ; \quad u = F_{-1}\left(\frac{\hat{f}}{4\pi^2|\xi|^2+\lambda}\right)$$

Věta 24.5 [Nulovost F. t. v nekonečnu]

Nechť $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Potom $\hat{f}(\xi) \to 0$; $|\xi| \to \infty$

Dk: 1. krok: $\varphi(x) \in C_c^\infty$

$$\psi(x) := \varphi(x) - \Delta\varphi(x) \in C_c^\infty \subset L^1$$

V. 24.3. $\hat{\psi} \in C_b$; tj. $\exists K > 0 : |\hat{\psi}(\xi)| \le K \ \forall \xi$

$$\hat{\psi}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) + 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{\varphi}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \cdot (1 + 4\pi^2 |\xi|^2)$$

$$|\hat{\varphi}(\xi)| \le K \cdot (1 + 4\pi^2|\xi|^2)^{-1} \text{ ; a tedy } \hat{\varphi}(\xi) \to 0 \text{ ; } |\xi| \to \infty$$

2. krok: $f(x) \in L^1$ libovolné ; $\varepsilon > 0$ dáno

Věta o hustotě: $\exists \varphi \in C_c^\infty$; $\|f - \varphi\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{2}$

krok 1: $\hat{\varphi} \in C_0 : \exists R > 0 \ |\hat{\varphi}(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}$; $|\xi| > R$

$$|\hat{f}(\xi)| = |\hat{f}(\xi) - \hat{\varphi}(\xi) + \hat{\varphi}(\xi)| \le \underbrace{|\hat{f}(\xi) - \hat{\varphi}(\xi)|}_{P_1} + \underbrace{|\hat{\varphi}(\xi)|}_{P_2}$$

$$P_1 \le \|\hat{f} - \hat{\varphi}\|_{C_b} \overset{\text{V.24.3.}}{\le} \|f - \varphi\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$P_2 < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall |\xi| > R$ celkem $|\hat{f}(\xi)| < \varepsilon$; $\forall |\xi| > R$

Def: Nosič funkce $\operatorname{supp} f = \overline{\{ x \in R^n ;\ f(x) \neq 0 \}}$
(support)

Věta 24.6. Nechť $f(x) \in$ je spojitá a má omezený nosič a $f \not\equiv 0, x \in R$
Potom $\hat{f}(\xi)$ nemá omezený nosič

DK: BÚNO: $\operatorname{supp} f \subset [-\pi, \pi]$ (lze přeškálovat argument $f \mapsto f(\lambda x)$)

1. krok: $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \xi} f(x)\,dx =$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2\pi i x \xi)^k}{k!}}_{\text{konv. stejn.}} \underbrace{f(x)}_{\text{omezená}}\,dx \qquad \text{vůči } x$$

=> lze zaměnit Σ a $\int$:

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(-2\pi i)^k}{k!} x^k f(x)\,dx \right)}_{c_k} \xi^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^k$$

platí $\forall \xi \in R$

mocninná řada, poloměr konvergence $= \infty$

=> $\hat{f}(\xi)$ má smysl pro $\forall \xi \in C$ a $\hat{f} \in \mathcal{H}(C)$

2. krok: ?? nechť $\hat{f}(\xi) = 0 \ \forall \xi \in R ;\ |\xi| > L$

$N = \{ \xi \in C ;\ \hat{f}(\xi) = 0 \} \supset (L, \infty)$

=> N má v C hromadný bod; např. L

V 23.17 $\longrightarrow$ $\hat{f} \equiv 0$ v C

3. krok: ? $f(x) \equiv 0$

$\hat{f}(\xi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = 0 ;\ \forall \xi \in C$

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \underbrace{e^{-ikx}}_{\cos kx - i k \sin x} dx = \pi (a_k - i b_k)$$

Four. koef. $f(x)$

V 21.7. : $\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ spojitá} \\ a_k, b_k = 0 \end{array} \right\} f(x) = 0$

Pozn.: hledáme prostor funkcí X ... $F: X \to X$ vzájemně jednoznačné

C_c ... NE (viz V.24.6.

L^1 ... NE $\left(F: \chi_{(-1,1)} \to \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi} \notin L^1\right)$

C_0 ... NE $(F: L^1 \to C_0$; není $\underline{\text{na}})$

Řešení $L^2(\Omega)$

Schwartzův prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Definice n-tice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$; $\alpha_j \geq 0$ celé; se nazývá multiindex; $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ je stupeň multiindexu

$f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(x)$$

$x \in \mathbb{R}^{(x_1, \dots, x_n)}$ $\quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$

$C^k(\mathbb{R}^n) = \{ f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},\ D^\alpha f(x) \text{ spojitá } \forall |\alpha| \leq k \}$

polynom $p(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ stupně $\leq N$ ... $p(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha x^\alpha$

Zobecnění věty 24.4.

(1) nechť $D^\alpha f(x) \in L^1 \cap C_0$ pro $\forall |\alpha| \leq k$

Potom $[D^\alpha f(x)]^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$ $\forall |\alpha| \leq k$

(2) nechť $x^\alpha f(x) \in L^1$ pro $\forall |\alpha| \leq k$

Potom $D^\alpha \hat{f}(\xi) = [(-2\pi i x)^\alpha f(x)]^\wedge(\xi)$ $\forall |\alpha| \leq k$

DK

(1) $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \xrightarrow{F} 2\pi i \xi_j \hat{f}(\xi)$

$$D^\alpha f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} f(x) \xrightarrow{F} \underbrace{(2\pi i \xi_1)^{\alpha_1} \cdots (2\pi i \xi_n)^{\alpha_n}}_{(2\pi i \xi)^\alpha} \hat{f}(\xi)$$

(2) $\frac{\partial}{\partial \xi_j} \hat{f}(\xi) \xleftarrow{F} [(-2\pi i x_j) f(x)]^\wedge(\xi)$

$D^\alpha \hat{f}$ $\qquad (-2\pi i x_j)^\alpha$

Def [Schwartzův prostor „rychle klesajících funkcí"]

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{ f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ x^\alpha D^\beta f \text{ je omezená } \forall \alpha, \beta \}$$

Pozn.: ekvivalentní: $p(x) D^\beta f(x)$ omezená $\forall$ polynom $p(x)$

speciálně $p(x) = (1+|x|^2)^N$; $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$

$$|(1+|x|^2)^N D^\beta f(x)| \le K \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$|D^\beta f(x)| \le \frac{K}{(1+|x|^2)^N} \quad \text{libovolné } N \text{ (} K \text{ nezávislé na } N\text{)}$$

- $C_c^\infty \subset \mathcal{S}$ ... $f(x) \in C_c^\infty \Rightarrow x^\alpha D^\beta f(x) \in C_c^\infty \subset C_b$
- $C_c^\infty \subsetneq \mathcal{S}$ ... $e^{-|x|^2} = \exp(-x_1^2 - \dots - x_n^2)$

$$\underbrace{x^\alpha D^\beta e^{-|x|^2}}_{\in\, C_0 \subset C_b} = g(x) \underbrace{e^{-|x|^2}}_{\to 0 \text{ velmi rychle pro } |x| \to \infty} ; \quad g(x) \text{ polynom}$$

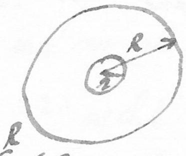
Lemma 24.1. [Integrace radiálních funkcí]

Nechť $f(|x|) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

Pak
$$\int_{|x|<R} f(|x|)\, dx = \beta_n \int_0^R r^{n-1} f(r)\, dr$$

kde β_n je $(n-1)$ rozměrná míra $\{|x| = 1\}$ (sféry)

Dk. „Fubini"



$$(LS) = \int_0^R \left(\int_{|x|=r} f(x)\, d\sigma_{n-1} \right) dr$$

σ_{n-1} ... $(n-1)$ rozměrná míra v $\mathbb{R}^n$

$$\int_{|x|=r} f(x)\, d\sigma_{n-1} = f(r)\, \underbrace{\sigma_{n-1} \{ x \in \mathbb{R}^n ; |x| = r \}}_{\beta_n \cdot r^{n-1}}$$

$\hookrightarrow$ 1-sféra

Důsledek:
$$\int_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|)^p} < \infty \iff p > n$$

$$\| \quad \int_0^\infty \frac{r^{n-1} \beta_n}{(1+r)^p}\, dr ; \quad \text{integrand} \sim r^{n-1-p} ; \quad r \to \infty$$

konvergence: $n-1-p < -1 \iff n < p$

Věta 24.7. [Vlastnosti $\mathcal{S}$]

(1) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneqq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

(2) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n) \quad \forall p \in [1,\infty]$

(3) $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow x^\alpha f(x);\ D^\alpha f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Dk (1) viz předchozí poznámky

(2) dřívější úvahy: $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists K \quad |f(x)| \le \frac{K}{(1+|x|^2)^N}$

$\Rightarrow f(x) \to 0;\ |x| \to \infty$; tj. $f \in C_0$

$\to \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \le \int_{\mathbb{R}^n} \frac{K^p}{(1+|x|^2)^{pN}} dx \underset{L24.1.}{=} C \int_0^\infty \underbrace{\frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{pN}}}_{\varphi(r) \sim r^{n-1-2pN};\ r \to \infty} dr$

integrál konverguje $\Leftrightarrow N > \frac{n}{2p}$

(3) ? $x^\alpha f(x) \in \mathcal{S}$ ... konečná kombinace fcí $x^{\tilde\alpha} D^{\tilde\beta} f(x)$

(i) $x^\alpha f(x)$ ... O.K.

(ii) $x^{\tilde\alpha} D^{\tilde\beta} (x^\alpha f(x))$ ... omezené ??

Věta 24.8. $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

dk. $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dáno

1. $\hat f(\xi) \in C^\infty$: V.24.7.: $x^\alpha f(x) \in L^1 \cap C_0 \quad \forall \alpha$

důsledek věty 24.4.: $D^\alpha \hat f(\xi) = \underbrace{[(-2\pi i x)^\alpha f(x)]}_{\in \mathcal{S} \subset L^1 \text{ (V.24.7.)}}\hat{}\,(\xi)$

$C_b \supset C_0 \xleftarrow{V.24.3.}$

2. $\xi^\alpha D^\beta \hat f(\xi)$ ... omezená; α, β libovolné

$D^\beta \hat f(\xi) = [(-2\pi i x)^\beta f(x)]\hat{}\,(\xi)$

$(2\pi i \xi)^\alpha D^\beta \hat f(\xi) = [D^\alpha\{(-2\pi i x)^\beta f(x)\}]\hat{}\,(\xi)$ důsl. V24.4.

$\xi^\alpha D^\beta \hat f(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{|\alpha|} [\underbrace{D^\alpha\{(-2\pi i x)^\beta f(x)\}}_{\in \mathcal{S} \subset L^1 \text{ V.24.7.}}]\hat{}\,(\xi)$

$C_0 \subset C_b$. $\xleftarrow{\ \mathcal{F}\ }$

Def [Konvoluce] $f(x), g(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$; $[f*g](x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$ $\quad x \in \mathbb{R}^n$, má-li PS smysl

Věta 24.9. [vlastnosti konvoluce]

(1) $[f*g](x) = [g*f](x)$, má-li jedna strana smysl

(2) $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g(x) \in L^q(\mathbb{R}^n)$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$\Rightarrow |[f*g](x)| \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$

speciálně $[f*g](x)$ má smysl $\forall x \in \mathbb{R}^n$

(3) $f(x), g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \|f*g\|_{L^1} \le \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}$;

speciálně $[f*g]x$ má smysl pro s.v. $x \in \mathbb{R}$

Dk (1) $LS = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy$ | subst. $y = x-z$, $dy = dz$

x pevné

$= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) g(x-z)\, dz = [g*f](x) = PS$

(2) Hölderova nerovnost:

$$\int |\varphi(y)\psi(y)|\, dy \le \left(\int |\varphi|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\int |\psi|^q\right)^{1/q}; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$= \|\varphi\|_{L^p} \cdot \|\psi\|_{L^q}$$

$$|[f*g](x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\, dy \le \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p dy\right)^{1/p}}_{\substack{\text{subst } x-y=z \\ \int |f(z)|^p dz}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^q\right)^{1/q} =$$

$$= \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \, \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

(3) $\|f*g\|_{L^1} = \int |(f*g)(x)|\, dx \le \int \left(\int |f(x-y) g(y)|\, dy\right) dx$

Fubini (nezáporný integrand)

$$= \int \left(\int |f(x-y)||g(y)|\, dx\right) dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} < \infty$$

speciálně $f*g \in L^1 \Rightarrow (f*g)(x) \in \mathbb{R}$ pro s.v. $x \in \mathbb{R}^n$

Věta 24.10. [F. t. konvoluce]

Nechť $f(x), g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Potom $[(f*g)(x)]^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$

dk. $f*g \in L^1$ (předchozí věta) $\Rightarrow$ F. tr. má smysl

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,\xi)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy\right) dx$$

$$\text{Fubini(?)} \quad = \int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{-2\pi i(y,\xi)} g(y) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x-y,\xi)} f(x-y)\, dx}_{\text{subst. } x-y=z;\ dx=dz\ (y \text{ pevné})} \right) dy$$

$$= \int e^{-2\pi i(z,\xi)} f(z)\, dz = \hat{f}(\xi)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(y,\xi)} g(y) \hat{f}(\xi)\, dy = \hat{g}(\xi)\, \hat{f}(\xi)$$

ověření Fubiniho: $h(x,y) = e^{-2\pi i(x,\xi)} f(x-y) g(y) \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |h(x,y)|\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\, dy\, dx = \ldots \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1} \text{ viz V.24.9.}$$

Fubini (nezáporné)

Lemma 24.2. [F. t. gaussiánu] $[e^{-\pi|x|^2}]^\wedge(\xi)=e^{-\pi|\xi|^2}$

dk. víme $e^{-\pi|x|^2}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

1. krok: $n=1$ $\quad v(\xi):=[e^{-\pi x^2}]^\wedge(\xi)$

$$v'(\xi)=[\underbrace{(-2\pi i x)\,e^{-\pi x^2}}]^\wedge(\xi) \quad \text{V 24.4.(2)}$$

pozorování: $i\frac{d}{dx}e^{-\pi x^2}$

$$=i\left[\frac{d}{dx}e^{-\pi x^2}\right]^\wedge(\xi)=i(2\pi i\xi)[e^{-\pi x^2}]^\wedge(\xi)$$

$$=-2\pi\xi v(\xi)$$

$$v'(\xi)+2\pi\xi v(\xi)=0 \quad \forall \xi\in\mathbb{R} \quad /\ e^{\pi\xi^2}$$

$$(v(\xi)e^{\pi\xi^2})'=0$$

$$v(\xi)=Ce^{-\pi\xi^2}; \text{ pro vhodné } C\in\mathbb{R}$$

$$C=v(0)=\int_{\mathbb{R}}e^{-2\pi i\,0\cdot x}e^{-\pi x^2}\,dx=\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi x^2}\,dx \;\Bigg|\; \begin{aligned}x&=\frac{u}{\sqrt{\pi}}\\ dx&=\frac{du}{\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

$$=\underbrace{\int_{\mathbb{R}}e^{-u^2}}_{\sqrt{\pi}}\frac{du}{\sqrt{\pi}}=1$$

$\sqrt{\pi}$ (Dirichletův integrál, možná Poissonův)

n obecné: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}e^{-2\pi i(\xi,x)}e^{-\pi|x|^2}\,dx=$

$$(\xi,x)=\xi_1x_1+\xi_2x_2+\dots+\xi_nx_n$$

$$|x|^2=x_1^2+\dots+x_n^2$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-2\pi i\xi_1x_1-\pi x_1^2+\dots+\dots+(-2\pi i\xi_nx_n-\pi x_n^2)}\,dx=$$

$$\underset{(e^{-\pi|x|^2}\in L^1)}{\overset{\text{Fubini}}{=}}\int_{\mathbb{R}}\left(\dots\int_{\mathbb{R}}(\ )\,dx_n\right)dx_1=$$

$$=\int_{\mathbb{R}}e^{-2\pi i\xi_1x_1-\pi x_1^2}\,dx_1\ \dots\ \int_{\mathbb{R}}e^{-2\pi i\xi_nx_n-\pi x_n^2}\,dx_n=$$

$$=e^{-\pi\xi_1^2}\dots e^{-\pi\xi_n^2}=e^{-\pi|\xi|^2}$$

(případ $n=1$)

Poznámka: Diracova funkce : • $\delta(x) = 0$; $x \neq 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\, dx = 1$$

– taková funkce neexistuje ($\delta(x) \notin L^1(\mathbb{R}^n)$)

Nechť ale $\delta(x)$ existuje, pak má tyto vlastnosti:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\delta(x)\, dx = f(0) \quad ; \ f \text{ spojitá}$$

tudíž:

$$[f * \delta](x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\delta(y)\, dy = f(x-y)\Big|_{y=0} = f(x)$$

$$f * \delta = f$$

$$\hat{\delta}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(\xi,x)} \delta(x)\, dx = 1$$

... opět vidíme, že $\delta(x) \notin L^1$ ($\hat{\delta} \notin C_0$, viz V 24.5.)

Lemma 24.3. [Aproximace Diracovy funkce]

Nechť $f(x) \in C_b(\mathbb{R}^n)$, nechť $\varphi(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$; $\int \varphi(x)\, dx = 1$

Označme $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

Pak $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} [f * \varphi_\varepsilon](x) = f(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}^n$

Dk. $\underset{x \in \mathbb{R}^n \text{ pevné}}{[f * \varphi_\varepsilon](x)} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy \ \Big| \ \begin{matrix} y = \varepsilon z \\ dy = \varepsilon^n dz \end{matrix}$

$$\det \begin{pmatrix} \varepsilon & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon \end{pmatrix} = \varepsilon^n$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \varepsilon z)\varphi(z)\, dz \ \Big| \ \varepsilon \to 0+$$

$$\to \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \varphi(z)\, dz = f(x)$$

? záměna lim a $\int$: $g(\varepsilon, z) \to \overbrace{f(x)\, \cancel{\ } \varphi(z)}^{f(x)\varphi(z)}$ $\forall z$ pevné

majoranta $|g(\varepsilon, z)| \leq C|\varphi(z)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Věta 24.11. [Inverze F. t.]

Nechť $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Potom $[\hat{f}]^\vee = f$, $[\check{f}]^\wedge = f$

Dk. (demoverze)

$$[\hat{f}(y)]^\vee(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x y} \hat{f}(y)\, dy =$$

$$\boxed{\begin{aligned}\check{\varphi}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x,y)} \varphi(y)\, dy \\ \hat{\varphi}(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (y,u)} \varphi(u)\, du\end{aligned}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x y} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i y u} f(u)\, du \right) dy \overset{?}{=} f(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(u) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i y (x-u)}\, dy \right) du = \left|\ \begin{aligned} u &= x - z \\ du &= dz \\ &(x \text{ pevné}) \end{aligned}\right.$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x-z)\, h(z)\, dz = [f * \delta](x) = f(x)$$

$$h(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i y z}\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi z y) + i \sin(2\pi z y)\, dy$$

$$h = \delta \qquad \begin{cases} z = 0 : & h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 = \infty \\ z \neq 0 : & \text{integrand } \sim\!\sim \ldots h(z) = 0 \end{cases}$$

Dk (skutečný)

$$I := \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \underbrace{f(u)\, g(\varepsilon y)\, e^{2\pi i (y, x-u)}}_{h(u,y)}\, du\, dy$$

$g(x) = e^{-\pi |x|^2}$

$\varepsilon > 0$ pevné

$f \in \mathcal{S}$ daná funkce

$$|h(u,y)| = |f(u)|\, e^{-\pi \varepsilon^2 |y|^2} \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

$$\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |h|\, du\, dy \underset{\substack{\text{Fubini} \\ (\geq 0)}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(u)|\, e^{-\pi \varepsilon^2 |y|^2}\, du \right) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(u)|\, du \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi \varepsilon^2 |y|^2}\, dy < \infty$$

$\hookrightarrow f \in \mathcal{S} \subset L^1$

Fubini: $I = \int \left(\int h\, du \right) dy = \int \left(\int h\, dy \right) du$

(a) $$I = \int_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon y)\, e^{2\pi i (y,x)} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(u)\, e^{-2\pi i (y,u)}\, du \right)}_{\hat{f}(y)} dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon y)\, e^{2\pi i (y,x)} \hat{f}(y)\, dy \;\Big|\; \varepsilon \to 0+$$

$$g(\varepsilon y) \to g(0) = 1 \quad \forall y \text{ pevné}$$

$$\to \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (y,x)} \hat{f}(y)\, dy = [\hat{f}]^{\vee}(x)$$

? záměna lim a $\int$: $|g(\varepsilon y) e^{2\pi i (y,x)} \hat{f}(y)| \le |\hat{f}(y)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$f \in \mathcal{S} \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S} \subset L^1$$

(b) $$I = \int \left(\int dy \right) du = \int_{\mathbb{R}^n} f(u) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon y)\, e^{2\pi i (y, x-u)}\, dy \right) du =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-z) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon y)\, e^{2\pi i (z,y)}\, dy \right)}_{\varphi(z)} dz$$

| $u = x - z$
| $du = dz$
| $x \dots$ pevné

$$\varphi(z) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon y)\, e^{-2\pi i (-z,y)}\, dy = [g(\varepsilon y)]^{\wedge}(-z)$$

L. 24.2. $[g(y)]^{\wedge}(z) = g(z)$

V. 24.1. $[f(\varepsilon y)]^{\wedge}(z) = \frac{1}{\varepsilon^n} \hat{f}\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)$

$$\varphi(z) = \frac{1}{\varepsilon^n} g\left(-\frac{z}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) = g_\varepsilon(z)$$

(značení L. 24.3)

celkem $= [f * g_\varepsilon](x) \to f(x)$; $\varepsilon \to 0+$

L. 24.3. ; $\varphi = g$

Poznámka: $[\hat{f}]^{\vee}(x) = f(x)$ $\forall x \dots$ dokázáno fakticky za předpokladu $f \in L^1 \cap C_b$; $\hat{f} \in L^1$

$[\check{f}]^{\wedge} \overset{?}{=} f \dots$ V. 24.1. : $\overline{\hat{g}} = \check{\bar{g}} \Rightarrow \hat{g} = \overline{\check{\bar{g}}}$

podobně $\check{g} = \overline{\hat{\bar{g}}}$

$$(\check{f})^{\wedge} = \left(\overline{\hat{\bar{f}}}\right)^{\overline{\vee}} = \overline{\check{\overline{\overline{\hat{\bar{f}}}}}} = \overline{\check{\hat{\bar{f}}}} = \bar{\bar{f}} = f$$

Důsledek: F vzájemně jednoznačně zobrazuje $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Dk. : prosté ? - linearita ; stačí $f \in \mathcal{S}$, $\hat{f} = 0 \Rightarrow f = 0$

V.24.11. : $f = [\hat{f}]^{\vee} = [0]^{\vee} = 0$

na ? g dáno; $g \in \mathcal{S} \Rightarrow \exists f \in \mathcal{S}$, $\hat{f} = g$

polož $f := \check{g}$: $\hat{f} = [\check{g}]^{\wedge} = g$; V.24.11.

Taktéž platí F_{-1} zobrazí $\mathcal{S} \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \mathcal{S}$

nyní je cílem rozšířit F na $L^2(\mathbb{R}^n)$

Lemma 24.4. [O přechodu F.t.]

Nechť $f(x), g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Potom

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \hat{g}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\, g(x)\, dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \check{g}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(x)\, g(x)\, dx$$

Dk (1. vztah) : $f, g \in L^1 \underset{V24.3.}{\Longrightarrow} \hat{f}, \hat{g}$ omezené ... integrály mají smysl

$$(LS) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (x,y)} g(y)\, dy \right)}_{\hat{g}(x)} dx =$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i (x,y)}\, dx \right)}_{\hat{f}(y)} dy = (PS)$$

ověření Fubiniho : $h(x,y) = f(x)\, g(y)\, e^{-2\pi i (x,y)} \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$

$$\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |h(x,y)|\, dx dy = \iint |f(x)| |g(y)|\, dx dy =$$

$$\underset{\substack{\text{Fubini}\\ \geq 0}}{=} \int |f(x)|\, dx \cdot \int |g(y)|\, dy < \infty$$

předpoklad : $f, g \in L^1$

Opakování: $L^2(\mathbb{R}^n) = \{ f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \text{ měřitelná}, \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 < \infty \}$

$$\|f\|_{L^2} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

konvence: $f = g$ ve smyslu $L^2(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ s.v. v $\mathbb{R}^n$

skalární součin: $\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bar{g}(x) \, dx$

Cauchy-Schwartz: $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}$

Hlubší vlastnosti (nedokázáno)

① $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je hustý v $L^2(\mathbb{R}^n)$:
$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n) \ \exists \varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ \varphi_n \to f$ v L^2
(tj. $\|\varphi_n - f\|_{L^2} \to 0$)

② $L^2(\mathbb{R}^n)$ je úplný:
$\{f_n\} \subset L^2$ konverguje ($\exists f : f_n \to f$ v L^2)
$\Leftrightarrow$ platí B.C. podmínka:
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall m, n \geq n_0)[\|f_m - f_n\|_{L^2} < \varepsilon]$

Věta 24.12. [Plancherelova nerovnost]
Nechť $f(x), g(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
Potom $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$
speciálně $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$

Dk:
$\langle f, g \rangle = \int f \bar{g}$; V.24.11. $f = (\hat{f})^\vee$, pak =
$$= \int (\hat{f})^\vee \bar{g} \ \underset{(*)}{\overset{L.24.1.}{=\!=}} \ \int \hat{f} (\bar{g})^\vee \ \underset{(**)}{\overset{V.24.1.}{=\!=}} \ \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

(*) $f = (\hat{f})^\vee$
(**) $(\bar{g})^\vee = (\hat{g})^-$

Věta 24.13. [F. tr. v $L^2(\mathbb{R}^n)$]

(1) Existuje zobrazení $F_2 : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ takové, že
$$F_2 f = \hat{f} \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$
(2) F_2 je izomorfismus $L^2(\mathbb{R}^n)$ na sebe; tj. vzájemně jednoznačné zobrazení, zachovávající normu a skalární součin.

DK (1) 1. krok: $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ dáno

věta o hustotě: $\exists \varphi_n \in \mathcal{S}; \varphi_n \to f$ v L^2

$\{\varphi_n\}$ .. cauchyovská v L^2 V.24.12. (Plancherel)

$\Rightarrow \{\hat{\varphi}_n\}$ cauchyovská v L^2 !! $\|\varphi_n - \varphi_m\|_{L^2} = \|\hat{\varphi}_n - \hat{\varphi}_m\|_{L^2}$

($\hat{\varphi}_n = \mathcal{F}\varphi_n$ má smysl: $\varphi_n \in \mathcal{S} \subset L^1$)

úplnost L^2: $\exists g \in L^2 : \hat{\varphi}_n \to g$ v L^2

definuji: $\boxed{F_2 f := g}$

2. krok ? korektnost definice: nezávisí na volbě $\{\varphi_n\}$

nechť $\varphi_n \to f$ v L^2

$\psi_n \to f$ v L^2 $\quad \varphi_n, \psi_n \in \mathcal{S}$

$\varphi_n - \psi_n \to f - f = 0$ v L^2

V.24.12. $\hat{\varphi}_n - \hat{\psi}_n \to 0$ v L^2

tj. $\lim_{n\to\infty} \hat{\varphi}_n = \lim_{n\to\infty} \hat{\psi}_n$

3. krok je to rozšíření $\mathcal{F}$?

$f \in \mathcal{S}$: lze volit $\varphi_n = f \quad \forall n$

$F_2 f = \lim_{n\to\infty} \hat{\varphi}_n = \lim_{n\to\infty} \hat{f} = \hat{f}$

MIMOŘÁDNÁ PŘEDNÁŠKA 24.5.2010

Věta 24.13. [F. tr. v $L^2(\mathbb{R}^n)$ - DOKONČENÍ]

Existuje lineární zobrazení $F_2 : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ tak, že

(1) $F_2 f = Ff \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

(2) F_2 je izomorfismus $L^2(\mathbb{R}^n)$ na sebe (tj. prosté, na, zachovává normu)

DK: (1) viz výše

(2) 1. krok $\langle f, g \rangle = \langle F_2 f, F_2 g \rangle, \ \forall f, g \in L^2$

volme $\left.\begin{array}{l} \varphi_n \in \mathcal{S};\ \varphi_n \to f \\ \psi_n \in \mathcal{S};\ \psi_n \to g \end{array}\right\}$ v L^2

dle definice: $\hat{\varphi}_n \to F_2 f$

$\hat{\psi}_n \to F_2 g$

Plancherel: $\langle \varphi_n, \psi_n \rangle = \langle \hat{\varphi}_n, \hat{\psi}_n \rangle \quad \forall n$

$n \to \infty$; spojitost skal. součinu (L. 21.1.)

$\langle f, g \rangle = \langle F_2 f, F_2 g \rangle$

speciálně $(f = g)$: $\|f\|_{L^2} = \|F_2 f\|_{L^2}$

tj. F_2 zachovává normu, je prosté

2. krok: F_2 je na: $g \in L^2$ dáno $\overset{?}{\exists} f \in L^2 : F_2 f = g$

volme $\psi_n \in \mathcal{S}$, $\psi_n \to g$ v L^2

položme $\varphi_n := [\psi_n]^\vee$ $\quad \{\psi_n\}$ cauchyovská (má limitu)

$\{\varphi_n\}$ —"— (Plancherel; $\psi_n = \hat{\varphi}_n$)

úplnost L^2: $\exists \lim_{n\to\infty} \varphi_n =: f$

$$F_2 f = \lim_{n\to\infty} \hat{\varphi}_n = \lim_{n\to\infty} \psi_n = g$$

Poznámka: Jak počítat $F_2 f$ prakticky?

$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (\xi, x)} f(x)\,dx$ nemá smysl pro $f \in L^2 \setminus L^1$

Lze dokázat: $[F_2 f](\xi) = \lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_{|x|<R} e^{-2\pi i (\xi, x)} f(x)\,dx}_{I(R)}$ pro s. v. ξ

Pozoruji $\quad |I(R)| \leq \int_{|x|<R} |f(x)|\, dx \leq \left(\int_{|x|<R} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{|x|<R} 1^2 dx \right)^{1/2}$

$< \infty$ pro $\forall R$

Obecně: $L^2(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$; viz např. $\frac{1}{1+|x|}$

Pro $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$: $I(R) \to \hat{f}(\xi)\ \forall \xi$

Úmluva: Dále píšeme Ff, $\hat{f}$ místo $F_2 f$; $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

PŘÍKLAD:

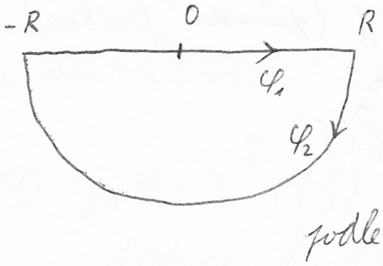
$$\Big[\underbrace{\frac{x}{(x^2-11ix-10)^2}}_{f(x)} \Big]^{\wedge}(\xi) = ?$$

singularity: $\quad D = (-11i)^2 + 4 \cdot 10 = -81$

$x_{1,2} = \frac{1}{2}(11i \pm 9i) = \begin{cases} i \\ 10i \end{cases}$

$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ spojitá v } \mathbb{R} \\ |f(x)| \sim \frac{1}{|x^3|}\ ;\ x \to \pm\infty \end{array} \right\} \Rightarrow f \in L^1(\mathbb{R})$

a) pro $\xi \geq 0$ nutno při použití reziduové věty použít dolní půlkružnici



$$g(z) = \frac{z \cdot e^{-2\pi i \xi z}}{(z^2 - 11iz - 10)^2}$$

• dole nejsou singularity:

podle Cauchyho věty $\quad 0 = \int_{\varphi} g(z)\, dz = \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2}$, $R \to \infty$

kde $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

$\int_{\varphi_1} g(z)\, dz \to \hat{f}(\xi)$

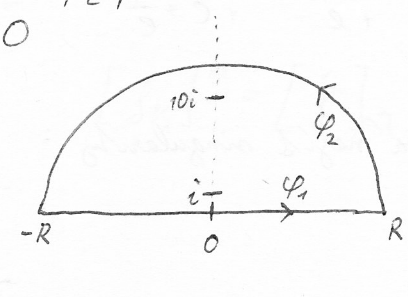
tvrdíme: $\int_{\varphi_2} g(z)\, dz \to 0 \qquad z \in \langle \varphi_2 \rangle$: $\operatorname{Im} z \leq 0$

$|e^{-2\pi i \xi z}| = e^{\operatorname{Re}(-2\pi i \xi z)} = e^{2\pi \overbrace{\xi \operatorname{Im} z}^{\leq 0}} \leq 1$

$|g(z)| \leq \frac{C}{|z^3|}$

závěr: $\quad \hat{f}(\xi) = 0 \ ;\ \xi \geq 0$

b) pro $\xi < 0$:



$$\int_{\varphi_1+\varphi_2} g(z)\, dz = 2\pi i \left(\operatorname{res}_i g + \operatorname{res}_{10i} g \right)$$

podobnou úvahou : $\int_{\varphi_1} \to \hat{f}(\xi)$; $\int_{\varphi_2} \to 0$

$$\xi > 0 : \quad \hat{f}(\xi) = 2\pi i\left(\mathrm{res}_i + \mathrm{res}_{10i}\right) = \frac{1}{729}\left[e^{20\pi\xi}(11-180\pi\xi) - e^{2\pi\xi}(11+18\pi\xi)\right]$$

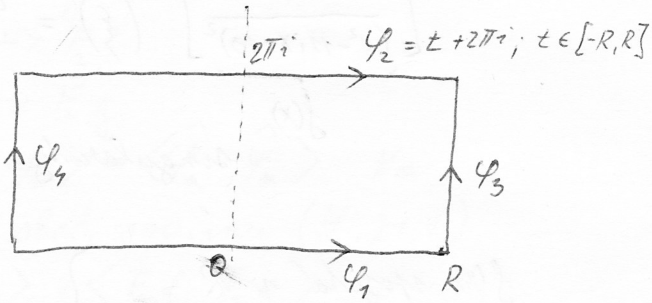
PŘÍKLAD (jiný typ)

$$\Big[\underbrace{\frac{1}{e^x+e^{-x}+e+\frac{1}{e}}}_{f}\Big]^{\wedge}(\xi) = ?$$

• nemá singularity v $\mathbb{R}$, funkce je integrovatelná

$$g(z) = \frac{e^{-2\pi i \xi z}}{e^z + e^{-z} + e + \frac{1}{e}}$$

ale integrujeme přes :



$$\varphi := \varphi_1 \dotplus \varphi_3 \dot- \varphi_2 \dot- \varphi_4$$

$$\int_{\varphi_1} g(z)\,dz \longrightarrow \hat{f}(\xi);\ R \to \infty$$

$$\int_{\varphi_2} g(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(t+2\pi i)\cdot e^{-2\pi i\xi(t+2\pi i)}\,dt \overset{\Delta}{=}$$

• trik je v tom, že f (původní funkce) je $2\pi i$ periodická

$$\overset{\Delta}{=} \int_{-R}^{R} f(t)\cdot e^{-2\pi i \xi t}\cdot e^{4\pi^2\xi}\,dt \to e^{4\pi^2\xi}\hat{f}(\xi)$$

tvrdíme : $\int_{\varphi_3} g$, $\int_{\varphi_4} g \longrightarrow 0$; $R \to \infty$

např. pro φ_4 :

$\varphi_4 = -R + 2\pi i t$; $t \in [0, 1]$

$$\frac{e^{-2\pi i\xi(-R+2\pi i t)}}{e^{-R+2\pi i t} + e^{R-2\pi i t} + e + \frac{1}{e}}$$

čitatel : $|\ \ | \le e^{4\pi^2 t} \le e^{4\pi^2}$

// na imaginární části $|e^{\cdots}|$ nezávisí

jmenovatel: $|\ \ | \ge |e^{R-2\pi i t}| - |e^{-R+2\pi i t} + e + \frac{1}{e}|$

$\ge e^{R} - e^{-R} - e - \frac{1}{e} \to \infty$

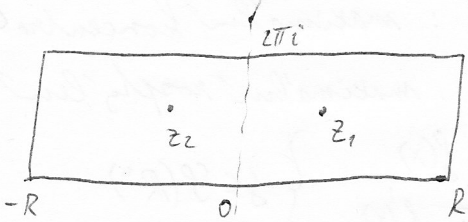
velmi rychle

zbývá najít singularity :

singularity: $e^z + e^{-z} + e + \frac{1}{e} = 0 \quad \Big/ \; e^z = \lambda$

$$\lambda^2 + \lambda\left(e+\frac{1}{e}\right) + 1 = 0$$

$$(\lambda + e)\left(\lambda + \frac{1}{e}\right) = 0$$



$$e^z = -e = e^{1+i\pi}$$

$$z = 1 + i\pi + 2k\pi i \; ; \; k \in \mathbb{Z}$$

$$e^z = -\frac{1}{e} = e^{-1+i\pi}$$

$$z = -1 + i\pi + 2k\pi i \; ; \; k \in \mathbb{Z}$$

pouze $\left.\begin{array}{l} z_1 = 1 + i\pi \\ z_2 = -1 + i\pi \end{array}\right\} \in \operatorname{int} \varphi$

pro $R \to \infty$: $\left(1 - e^{4\pi^2\xi}\right)\hat{f}(\xi) = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{1+i\pi} g + \operatorname{res}_{-1+i\pi} g\right)$

$$g = \frac{e^{-2\pi i \xi z}}{e^z + e^{-z} + e + \frac{1}{e}}$$

celkem: $\hat{f}(\xi) = \frac{2\pi e}{e^2 - 1} \cdot \frac{e^{2\pi^2\xi}}{e^{4\pi^2\xi} - 1} \sin 2\pi\xi \; ; \; \xi \neq 0$

v nule lze využít spojitosti, nebo spočítat přímo z definice

$$\hat{f}(0) = \frac{e}{e^2 - 1}$$

d.cv.: ověřte si sudost $\hat{f}(\xi)$ // $f(x)$ je sudá

„Princip neurčitosti": $f(x)$ koncentrovaná $\Rightarrow$ $\hat{f}(\xi)$ rozptýlená

$\hat{f}$ — ״ — $\Rightarrow$ f — ״ —

① $f_\lambda(x) = \lambda^{-\frac{n}{2}} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$; $\lambda > 0$

tvrdíme $\|f_\lambda\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$:

$$\|f_\lambda\|^2_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\lambda^{-\frac{n}{2}} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right|^2 dx \, \left| \begin{array}{l} x = \lambda y \\ dx = \lambda^n dy \end{array} \right| = \cancel{\lambda^{-n}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^2 \cancel{\lambda^n} \, dy = \|f\|^2_{L^2}$$

$[f(\lambda x)]^\wedge(\xi) = \lambda^{-n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$ $\qquad$ $[f_{1/\lambda}]^\wedge = [\hat{f}]_\lambda$

$$[\lambda^{n/2} f(\lambda x)]^\wedge(\xi) = \lambda^{-\frac{n}{2}} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$$

② Věta 24.6 : $\left.\begin{array}{l}\text{supp } f \text{ omezený} \\ f \not\equiv 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{supp } \hat{f} \text{ neomezený}$

③ $\delta_0 \xrightarrow{F} 1$ krajní případ : maximální koncentrace δ
$\rightarrow$ maximální rozptýlení 1

④ Definujme $\left.\begin{array}{l} X: f(x) \longmapsto x\, f(x) \\ D: f(x) \longmapsto \frac{1}{2\pi i} f'(x) \end{array}\right\} f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\|Xf\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} x^2 |f(x)|^2 dx \text{ ... míra rozptýlenosti nosiče } f \text{ od nuly}$$

$$\|Df\|_{L^2}^2 = \|\widehat{Df}\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \text{ ... míra rozptýlenosti } \hat{f}(\xi)$$

Věta 24.14. [Heisenbergův princip neurčitosti]
Nechť $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; $\|f\|_{L^2} = 1$
Potom $\|Xf\|_{L^2} \|Df\|_{L^2} \geq \frac{1}{4\pi}$
rovnost nastává $\Leftrightarrow f(x) = a\, e^{-b|x|^2}$ pro vhodné $a, b > 0$
Názorně : nosiče $f, \hat{f}$ nemohou být současně příliš koncentrované