3. TERMÍN – 14.6.2010

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. [**12b**] Nechť f je lichá, 2π-periodická funkce, nechť

$$f(x) = \exp(-x), \qquad x \in (0, \pi).$$

(a) Najděte Fourierovy koeficienty.
(b) Čemu se rovná součet příslušné Fourierovy řady ? Nakreslete graf; podobně odůvodněte (zejména vypočtěte derivaci funkce f a vyšetřete její spojitost).
(c) Napište Parsevalovu rovnost (nejprve obecně a potom vyčíslete její části v tomto konkrétním případě).
(d) Napište vzoreček pro integrování Fourierovy řady člen po členu (nejprve obecně; pak vyčíslete podrobně jednotlivé členy – omezte se na $x \in [-\pi, \pi]$).

---

2. [**12b**] Vypočítejte pomocí reziduové věty

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin^2 x}{x^6 + 10x^4 + 9x^2} dx.$$

Komentujte podrobně:

- použitá pravidla pro výpočet rezidua
- limitní přechody u jednotlivých částí křivkových integrálů

---

3. [**8b**] Je dána funkce

$$f(z) = \frac{z^2}{\tanh(2z)},$$

přičemž tanh = sinh / cosh.
(a) Jaký typ singularity má funkce f v bodě 0? Zdůvodněte.
(b) Najděte alespoň dva nenulové členy příslušného Laurentova rozvoje.
(c) Najděte všechny ostatní singularity a vypočtěte příslušná rezidua.

1. příklad [12b]

[4] ... Fourierovy koeficienty

[3] ... součet F.ř. (spojitost derivace = 2 body)

[2] ... Parseval

[3] ... integrace člen po členu

---

2. příklad [12b]

[3] ... sestavení funkce F(z) + singularity

[3] ... výpočet reziduí

[2+2] ... limitní přechody přes půlkružnice

[2] ... dosazení - celkový výsledek

---

3. příklad [8b]

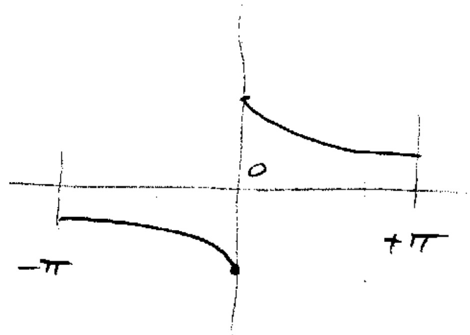
[2] ... typ singularity (+ zdůvodnění)

[3] ... 1=postup, 2=dva správné členy

[3] ... 1=singularity, 2=rezidua

① $f(x) = e^{-x}$; $x \in (0,\pi)$.

liché; 2π − periodické.



$a_k = 0$; $\forall k$.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x}\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi} I_k; \quad I_k = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin kx.$$

---

per-partes: (k ≥ 1)

$$\int_0^{\pi} e^{-x}\sin kx = \underbrace{\left[-e^{-x}\sin kx\right]_0^{\pi}}_{0} + k\int_0^{\pi} e^{-x}\cos kx\,dx;$$

$$= k\left\{\left[-e^{-x}\cos kx\right]_0^{\pi} - k\int_0^{\pi} e^{-x}\sin kx\,dx\right\}.$$

$$I_k = k\left(-e^{-\pi}\cos k\pi + 1\right) - k^2 I_k$$

$$I_k = \frac{k}{1+k^2}\left(1-(-1)^k e^{-\pi}\right).$$

$$F_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{\pi(1+k^2)}\left(1-(-1)^k e^{-\pi}\right)\sin kx.$$

✓ o.k.

$x \in (0,\pi)$: $\quad f(x) = e^{-x}$; $f'(x) = -e^{-x}$

$x \in (-\pi,0)$: $f(x) = -e^{x}$; $f'(x) = -e^{x}$;

$$\lim_{x\to 0\pm} f(x) = \pm 1 \qquad \lim_{x\to \pi\pm} f(x) = \pm e^{-\pi}$$

$$\lim_{x\to 0\pm} f'(x) = -1 \qquad \lim_{x\to \pi\pm} f'(x) = -e^{-\pi}$$

$\longrightarrow$ $f(x)$ je po částech C^1 : $\quad F_f(x) = \begin{cases} f(x) ; & x \neq k\pi \\ 0 ; & x = k\pi . \end{cases}$

Parseval: $\quad$ obecně: $\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right)$

dosazení: $\quad$ LS : $\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-2x}\,dx$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(1 - e^{-2\pi}\right).$$

PS: $\quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{\pi^2(1+k^2)^2}\left(1-(-1)^k e^{-\pi}\right)^2 .$

integrace: $\int_0^x f(t)\,dt - \frac{a_0}{2}x = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}\sin kx - \frac{b_k}{k}\cos kx$

$$\frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$$

dosazení:

LS: $\int_0^x f(t)\,dt =$ (i) $x \in [0,\pi]$: $\int_0^x e^{-t}\,dt = 1 - e^{-x}$

(ii) $x \in [-\pi, 0]$

$$-\int_0^x e^{t}\,dt = e^{x} - 1$$

celkem: $\int_0^x f(t)\,dt = \operatorname{sgn}(x)\cdot\left(1 - e^{-|x|}\right)$; $x \in [-\pi,\pi]$.

$$\operatorname{sgn}(x)\cdot\left(1 - e^{-|x|}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(1+k^2)}\left(1-(-1)^k e^{-\pi}\right)\left[1 - \cos kx\right].$$

② $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin^2 x}{(x^4+10x^2+9)x^2}$

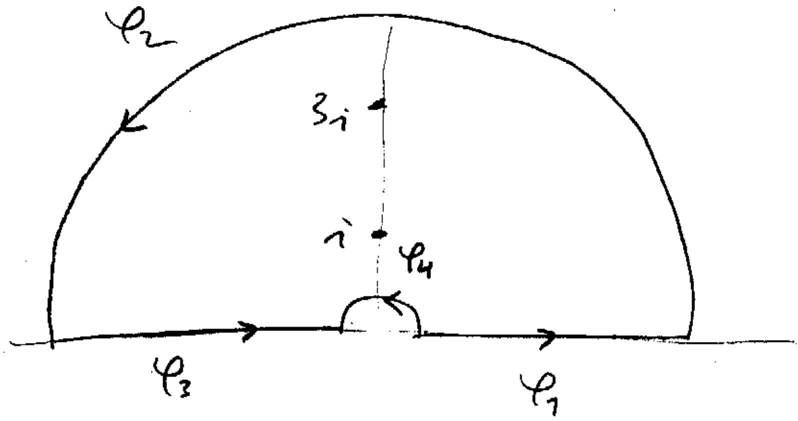
$$(x^2+9)(x^2+1)$$
$$= x^4+10x^2+9.$$

$$D = 100 - 36 = 64$$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm 8}{2} = \begin{cases} -9 \\ -1 \end{cases}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$f(z) = \frac{1-e^{2iz}}{(z^4+10z^2+9)z^2} ;$$



sing: $z = 0$

$z = \pm i$

$z = \pm 3i$

$\varphi_1 : t ;\ t \in [r, R]$

$\varphi_3 : t ;\ t \in [-R, -r]$

$\varphi_2 : Re^{it} ;\ t \in [0, \pi]$

$\varphi_4 : re^{it} ;\ t \in [0, \pi]$.

$$\int_{\varphi} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \left(\operatorname{res}_i f(z) + \operatorname{res}_{3i} f(z) \right)$$

$$= \underbrace{\left(\int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_3} \right)}_{} + \int_{\varphi_2} - \int_{\varphi_4}$$

$\underline{Re(\,) \to I}$.

$\int_{\varphi_2} f(z) \to 0$: $$|1-e^{2iz}| \le 1+|e^{2iz}| \le 2$$

$$|e^{2iz}| = e^{-2\,\mathrm{Im}\,z} \le 1.$$

$$|z^2(z^4+10z^2+9)| \ge c|z|^6 ; \ |z| \text{ velké!}$$

$\to$ lemma o velké půlkružnici.

$$\int_{\varphi_4} f(z)\,dz \to i\pi A \ ; \ r \to 0+$$

kde $A = \lim\limits_{z\to 0} z f(z) = ;$

$$z f(z) = \underbrace{\frac{1-e^{2iz}}{z}}_{\to -2i} \cdot \underbrace{\frac{1}{z^4+10z^2+9}}_{\to \frac{1}{9}} \to -\frac{2}{9} i$$

(l'Hospital)

celkem: $\int_{\varphi_4} f(z)\,dz \to \frac{2\pi}{9}$.

rezidue:

$z_0 = i$ (jednoduchý pól):

$$\operatorname{res}_i f(z) = \operatorname{res}_i \underbrace{\frac{1-e^{2iz}}{z^2(z^2+9)} \cdot \frac{1}{(z+i)}}_{\in \mathcal{H}(\mathcal{U}(i))} \cdot \frac{1}{z-i}$$

$$= \frac{1-e^{-2}}{(-1)(8)2i} = \frac{1-e^{-2}}{-16i}.$$

$z_0 = 3i$ (jednoduchý pól)

$$\operatorname{res}_{3i} f(z) = \operatorname{res}_{3i} \underbrace{\frac{1-e^{2iz}}{z^2(z^2+1)(z+3i)}}_{\in \mathcal{H}(\mathcal{U}(3i))} \cdot \frac{1}{z-3i}$$

$$= \frac{1-e^{-6}}{(-9)\cdot(-8)6i} = \frac{1-e^{-6}}{432i}$$

celkem:

$$2\pi i\left(\frac{1-e^{-2}}{-16i}+\frac{1-e^{-6}}{432i}\right)=I-\frac{2\pi}{9}$$

$$I=2\pi\left(\frac{1}{9}-\frac{1-e^{-2}}{16}+\frac{1-e^{-6}}{432}\right)$$ [OK].

③ $\frac{z^2}{\sinh 2z}$ $\ast$ $= \frac{z^2 \cosh 2z}{\sinh 2z} = \frac{z^2\left(e^{2z}+e^{-2z}\right)}{e^{2z}-e^{-2z}}$.

sing.: $e^{2z} = e^{-2z}$

$e^{4z} = 1 = e^0$: $4z = 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{z_k = \frac{i\pi}{2} k}.$$

$z=0$: $e^{2z} = 1 + 2z + \frac{1}{2}(2z)^2 + \frac{1}{6}(2z)^3 + \dots$

$= 1 + 2z + 2z^2 + \frac{4}{3}z^3 + \dots$

$e^{-2z} = 1 - 2z + 2z^2 - \frac{4}{3}z^3 + \dots$

čitatel: $z^2\left(2 + 4z^2 + 0z^3 + \dots\right)$

$= 2z^2 + 4z^4 + \mathcal{O}(z^6)$.

jmenovatel: $4z + \frac{8}{3}z^3 + \mathcal{O}(z^5)$

tedy: $f(z) \sim z$; $z \to 0$:

$f(z) = Az + Bz^2 + Cz^3 + \dots$ $B=0$ (liché!!)

$\left(2z^2 + 4z^4 + \mathcal{O}(z^6)\right) = \left(Az + Cz^3 + \dots\right)\left(4z + \frac{8}{3}z^3 + \mathcal{O}(z^5)\right)$

z^2: $2 = A \cdot 4$; $A = \frac{1}{2}$

z^4: $4 = A \cdot \frac{8}{3} + 4C$; $C = 1 - \frac{2}{3} \cdot A = \frac{2}{3}$

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}; \qquad h(z) = z^2 \cosh 2z \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$$

$$g(z) = \sinh 2z;$$

$$g(z_k) = 0$$

$$g'(z_k) = 2\cosh 2z_k = 2e^{z_k} \neq 0.$$

$$\Rightarrow \operatorname{res}_{z_k} f(z) = \left.\frac{z^2 \cosh 2z}{2\cosh 2z}\right|_{z=z_k} = z_k^2 = -\frac{\pi^2 k^2}{8}.$$