5. TERMÍN – 6.9.2010

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. **[12b]** Nechť f je 2π-periodická funkce, nechť

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0], \\ \sin(ax), & x \in (0, \pi), \end{cases}$$

kde $a > 0$ je pevné, *necelé* číslo.
(a) Najděte Fourierovy koeficienty. (*Pro zjednodušení zápisu značte* $A = \cos a\pi$, $B = \sin a\pi$. *Uvažte též, že* $\sin(y \pm k\pi) = (-1)^k \sin y$.)
(b) Čemu se rovná součet příslušné Fourierovy řady ? Nakreslete graf; podobně odůvodněte (zejména vypočtěte derivaci funkce f a vyšetřete její spojitost).
(c) Napište Parsevalovu rovnost (nejprve obecně a potom vyčíslete její části v tomto konkrétním případě).
(d) Napište vzoreček pro integrování Fourierovy řady člen po členu (nejprve obecně; pak vyčíslete podrobně jednotlivé členy – omezte se na $x \in [-\pi, \pi]$).

---

2. **[12b]** Vypočítejte pomocí reziduové věty

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{x(x^2+9)^2} dx.$$

Komentujte podrobně:

- použitá pravidla pro výpočet rezidua
- limitní přechody u jednotlivých částí křivkových integrálů

---

3. **[8b]** Je dána funkce

$$f(z) = \frac{z^2}{e^z + e^{-z} - 2}.$$

(a) Jaký typ singularity má funkce f v bodě 0? Zdůvodněte.
(b) Najděte alespoň *tři nenulové členy* příslušného Laurentova rozvoje.
(c) Najděte všechny *nenulové* singularity. Vysvětlete co nejpodrobněji, jak byste počítali příslušná rezidua (výpočet nemusíte provádět).

1. příklad [12b]

[4] ... Fourierovy koeficienty

[3] ... součet F.ř. (spojitost derivace f = 2 body)

[3] ... integrace člen po členu

[2] ... Parseval

---

2. příklad [12b]

[3] ... sestavení funkce F(z) + singularity + křivka

[3] ... výpočet rezidua

[2] ... malá půlkružnice

[2] ... velká půlkružnice

[2] ... celkový výpočet (=numerická správnost)

---

3. příklad [8b]

[2] ... typ singularity (+ odůvodnění)

[3] ... bod za každý člen v rozvoji f

[3] ... singularity + vzoreček pro reziduum (1+2)

(1)

$$f(x) = \begin{cases} 0 ; & x \in (0,\pi) \\ \sin ax ; & x \in (0,\pi) ; \quad a > 0 \end{cases} \quad a \notin \mathbb{Z}. \quad \text{periódico}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin ax = \frac{1}{\pi a}\left[-\cos ax\right]_0^\pi = \frac{1}{\pi a}\left(1-\cos a\pi\right).$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin ax \cos x \, dx \qquad \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$

$$\pi a_k = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(a+1)x + \sin(a-1)x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(a+1)x}{a+1} - \frac{\cos(a-1)x}{a-1}\right]_0^\pi \qquad \boxed{A = \cos a\pi}$$

$$= \frac{1}{a+1}\left(1-\cos(a+1)\pi\right) + \frac{1}{a-1}\left(1-\cos(a-1)\pi\right)$$

$$\frac{1+A}{a+1} + \frac{1+A}{a-1} = (1+A)\cdot\frac{2a}{}$$

$$\pi a_k = \int_0^\pi \sin ax \cos kx \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(a+k)x + \sin(a-k)x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(a+k)x}{a+k} + \frac{\cos(a-k)x}{a-k}\right]_0^\pi$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+k}\left(\cos(a+k)\pi - 1\right) + \frac{1}{a-k}\left(\cos(a-k)\pi - 1\right)\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+k}\left((-1)^k A-1\right)+\frac{1}{a-k}\left((-1)^k A-1\right)\right)$$

$$=\frac{1-(-1)^k A}{2}\left(\frac{2a}{a^2-k^2}\right)=\frac{1-(-1)^k A}{}\cdot\frac{a}{a^2-k^2}.$$

$$\boxed{a_k=\frac{1-(-1)^k A}{\pi}\cdot\frac{a}{a^2-k^2}}$$

$$\pi b_k=\int_0^\pi \sin ax\cdot\sin kx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(a-k)x-\cos(a+k)x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a-k)x}{a-k}-\frac{\sin(a+k)x}{a+k}\right]_0^\pi$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^k B}{a-k}-\frac{(-1)^k B}{a+k}\right)$$

$$=(-1)^k B\cdot\frac{k}{a^2-k^2}$$

$$\boxed{b_k=\frac{(-1)^k B k}{\pi(a^2-k^2)}.}$$

Parseval: obecně: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$.

LS: $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 ax\,dx = \frac{-1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\cos 2ax - 1)\,dx$

$= \frac{-1}{2\pi}\left[\frac{\sin 2ax}{2a} - x\right]_0^{\pi} = \frac{-1}{2\pi}\left(\frac{\sin 2a\pi}{2a} - \pi\right)$.

Integrace: $\int_0^x f(t)\,dt - \frac{a_0 x}{2} = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}\sin kx - \frac{b_k}{k}\cos kx$

$\frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$.

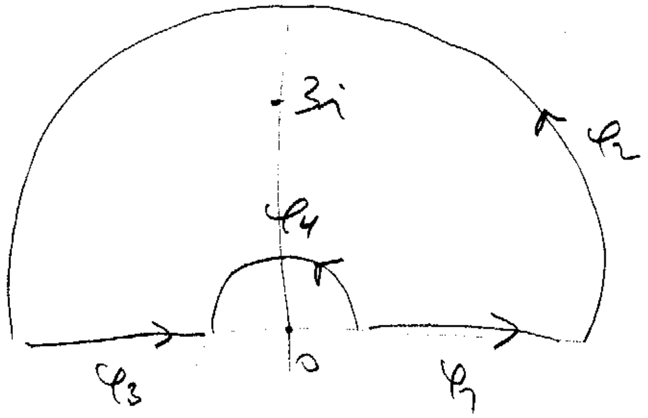
LS: $\int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} 0; & x \in [-\pi, 0] \\ \int_0^x \sin at\,dt = \left[-\frac{\cos at}{a}\right]_0^x = \frac{1}{a}(1 - \cos ax) & x \in [0, \pi]. \end{cases}$

$f'(t) = 0; \quad x \in (-\pi, 0)$

$= a\cos ax; \quad x \in (0, \pi)$.

$f'_{\pm}(0) = \begin{cases} a \\ 0 \end{cases}; \quad f'_{\pm}(\pi) = \begin{cases} 0 \\ a\cos a\pi \end{cases}$.

(2) $$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{2x(x^2+9)^2}\,dx \,; \qquad F(z) = \frac{e^{2iz}}{2z(z^2+9)^2}$$



$$\varphi := \varphi_1 \dotplus \varphi_2 \dotplus \varphi_3 \dotplus \varphi_4 .$$

$$2\pi i \cdot \operatorname{res}_{3i} f(z) = \underbrace{\int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_3}}_{\to\, iI + \cdots} - \int_{\varphi_4} + \int_{\varphi_2} .$$

$$f(z)z = \frac{e^{2iz}}{2(z^2+9)^2} \to \frac{1}{2\cdot 81} = \frac{1}{162} \,; \quad z \to 0$$

$$\int_{\varphi_4} \to \frac{i\pi}{162} .$$

$$\int_{\varphi_2} \to 0 \,; \quad \text{neboť} \quad |f(z)| \le \frac{c}{|z|^3} \,; \quad z \in \langle \varphi_2 \rangle$$

$$f(z) = \underbrace{\frac{e^{2iz}}{2z(z+3i)^2}} \cdot \frac{1}{(z-3i)^2}$$

$$h(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(3i)),$$

$$\operatorname{res}_{3i} f(z) = h'(z)\Big|_{z=3i} = \cdots = -\frac{e^{-6}}{81}.$$

---

odtud:

$$2\pi i \cdot \left(-\frac{e^{-6}}{81}\right) = i I - \frac{i\pi}{162}$$

$$\boxed{I = \frac{\pi}{162} - \frac{2\pi e^{-6}}{81}.}$$

③ $$\frac{R^2}{e^R+e^{-R}-2} = \frac{R^2 e^R}{(e^R-1)^2} = e^R\left(\frac{R}{e^R-1}\right)^2 \to 1; \quad R\to 0$$

$\rightsquigarrow$ odstranitelná singularita.

jmenovatel: $$e^R+e^{-R}-2 = 1+R+\frac{R^2}{2}+\frac{R^3}{6}+\frac{R^4}{24}+\frac{R^6}{720}$$
$$+1-R+\frac{R^2}{2}-\frac{R^3}{6}+\frac{R^4}{24}-$$
$$-2$$
$$= R^2+\frac{R^4}{12}+\frac{R^6}{360}+$$

$f(R)$ .. sudá: $= A + BR^2 + CR^4 + \dots$

$$R^2 = \left(R^2+\frac{R^4}{12}+\frac{R^6}{360}+\dots\right)\cdot\left(A+BR^2+CR^4+\dots\right)$$
$$= AR^2 + \left(B+\frac{A}{12}\right)R^4 + \left(C+\frac{B}{12}+\frac{A}{360}\right)R^6.$$

$A = 1$

$B+\frac{1}{12}=0: \quad B=-\frac{1}{12}$

$C+\frac{B}{12}+\frac{A}{360}=0: \quad C=\frac{1}{144}-\frac{1}{360}=\frac{1}{240}$

$$f(R) = 1-\frac{R^2}{12}+\frac{R^4}{240}\dots$$

$$f(z) = \frac{z^2 e^z}{(e^z - 1)^2} \quad ; \quad \text{2-násobné póly} \quad z_k = 2k\pi i; \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

$$\operatorname{res}_{z_k} = \lim_{z \to z_k} \left[\frac{(z - z_k)^2 z^2 e^z}{(e^z - 1)^2} \right]'.$$