Je-li T invertibilní, je zdola omezené - existuje $\beta > 0$ tak, že $||Tx|| \geq \beta||x||$ pro každ $x \in H$. Protože tak $\operatorname{Rng} T = H$ a $(T^{-1}Tx, Tx) = (x, Tx) = (Tx, x) \geq 0$, je T^{-1} pozitivní. Dále pro každé $x \in H$ máme

$$(T^2x, x) = (Tx, Tx) = ||Tx||^2 \geq \beta^2||x||^2 = (\beta^2 x, x)\,,$$

což není nic jiného než $T^2 \geq \beta^2 I$. Potřebujeme však dokzat, že $T \geq \beta I$. Ale to je již snadné. Operátor $T + \beta I$ je invertibilní a jeho inverze $(T + \beta I)^{-1}$ je pozitivní (to plyne z předchozích řádků). Protože pozitivní operátory $T^2 - \beta^2 I$ a $(T + \beta I)^{-1}$ komutují, je i jejich součin

$$(T^2 - \beta^2 I)(T + \beta I)^{-1} = (T - \beta I)(T + \beta I)(T + \beta I)^{-1} = T - \beta I$$

pozitivní.

4.6 Spektrální rozklad normálního operátoru

1. Najděte spektrální míry operátorů (tj. míry E a $E_{x,x}$ splující $(f(T)x, x) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) dE_{x,x}(\lambda)$:
   (a) $Tf(t) = tf(t)$ pro $f \in \mathcal{L}^2[-1, 1]$,
   (b) T je ortogonální projekce na H,
   (c) T je levý shift na $\ell^2(\mathbb{Z})$,
   (d) $T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_2, x_1, x_4, x_3, \dots)$, $(x_1, x_2, \dots) \in \ell^2(\mathbb{Z})$,
   (e) $Tf(t) = f(t + 1)$, $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$,
   (f)
   $$B = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$
   (g) $T(\{x_n\}) = \{\frac{x_n}{n}\}$, $\{x_n\} \in \ell^2$.
2. Pro $\varphi \in L^\infty(\mu)$ položme $M_\varphi f = \varphi f$, $f \in L^2(\mu)$. Najděte $\sigma(M_\varphi)$ a vlastní čísla M_φ. Ukažte, že zobrazení $\varphi \mapsto M_\varphi$ je izomorfizmus (zachovává všechno) $L^\infty(\mu)$ do $\mathcal{L}(L^2(\mu))$.
3. Ukažte, že Fourierova transformace F na $L^2(\mathbb{R})$ je unitární operátor, platí $F^4 = I$, $\sigma(F) = \sigma_p(F) = \{1, -1, i, -i\}$. (Vyzkoušejte funkce
   $$\exp(\frac{1}{2}x^2)(\frac{d}{dx})^n \exp{(-x^2)}.)$$
   Což takhle zkusit najít spektrální rozklad F?
4. Je–li $\mathcal{H}$ separabilní a $T \in \mathcal{L}(H)$ normální, pak existuje nejvýše spočetně mnoho $\lambda \in \sigma(T)$ tak, že $E(\{\lambda_n\}) \neq 0$.
5. Je–li $T \in \mathcal{L}(H)$ normální, pak T je samoadjungovaný (pozitivní, unitární) právě tehdy, když $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ ($\sigma(T) \subset [0, \infty)$, $\sigma(T) \subset \{\lambda : |\lambda| = 1\}$).
6. Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ normální a $\sigma_p(T)$ je borelovská. Pak $E(\sigma(T) \setminus \sigma_p(T)) = 0$ právě tehdy, když existuje ortonormální báze vlastních vektorů.

   Najděte T normální, že $\sigma_p(T)$ je neborelovská.
7. Je–li $T \in \mathcal{L}(H)$ normální a $T = U|T|$ jeho polární rozklad, pak $U = f(T)$ pro nějakou $f \in \mathcal{B}^b(\sigma(T))$. Tedy $U|T| = |T|U$.
8. Je–li $T \in \mathcal{L}(H)$ samoadjungovaný, pak e^{iT} je unitární. Platí to i naopak?
9. Je–li $T \in \mathcal{L}(H)$ unitární, pak existuje spojitá křivka $\gamma : [0, 1] \to \mathcal{L}(H)$ tak, že $\gamma(t)$ je unitární pro $t \in [0, 1]$, $\gamma(0) = T$ a $\gamma(1) = 1$.

4.7 Distribuce

1. Ať S je 2-rozměrná hladká omezená plocha v $\mathbb{R}^3$ a ρ je spojitá funkce na S. Ukažte, že následující zobrazení definují distribuce:
   $$\varphi \mapsto \int_S \varphi(x)\rho(x) dS(x)\ , \quad \varphi \mapsto \int_S \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} \rho(x) dS(x)\ .$$

2. Ukažte, že neexistuje distribuce $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ tak, že pro všechny $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ platí

$$T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{1}{x^2}} \varphi(x) dx \ .$$

3. Ať $\varphi_n \in L^\infty(\mathbb{R})$ jsou nezáporné, $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n = 1$ a pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|>\varepsilon} \varphi_n dx = 0 \ .$$

   Pak $\varphi_n \to \delta_0$ v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

4. Ukažte, že $\sin(nx) \to 0$ v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, ale $\sin(nx)$ nekonverguje bodově k nule.
5. Spočtěte derivace a druhé derivace distribucí:

$$\delta_0 \ , \quad \sin x \cdot \chi_{(0,1)} \ , \quad \ln|x| \ , \quad |\sin x| \ , \quad \max\{0, x\} \ .$$

6. Ať $f(t,x) = \frac{1}{2}$ pro $t > |x|$ a 0 jinak. Ukažte, že $T := T_f$ splňuje rovnici

$$T_{tt} - T_{xx} = \delta_{(0,0)} \ .$$

7. Najděte funkci $f \in \mathcal{C}^2([0,\infty))$, $f = 0$ na $(-\infty, 0)$ tak, že

$$f'' + f = \delta$$

   v $D'(\mathbb{R})$.

8. Ukažte, že formule

$$T_{\frac{1}{|x|^2}}(\varphi) := \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^2} dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|^2} dx$$

   definuje distribuci v $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$, která řeší rovnici

$$|x|^2 T = 1 \ .$$

9. Ukažte, že všechna řešení rovnice $f' = 0$ v $\mathscr{D}'((a,b))$ jsou konstanty.
10. Ukažte, že funkce

$$\varphi(x) \begin{cases} 0 \ , |x| \geq 1 \ , \\ e^{-\frac{1}{1-x^2}} \ , |x| < 1 \ , \end{cases}$$

   je prvkem $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.

11. Ukažte, že $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ a $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ jsou nemetrizovatelné prostory.
12. Ukažte, že

$$\triangle T_{\frac{1}{|x|}} = -4\pi\delta_{(0,0,0)}$$

   v $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$.

13. K tomu aby trigonometrická řada $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ konvergovala v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ stačí, aby existovala čísla M, k tak, že $|a_n| \leq Mn^k$. Dokažte.
14. Ať $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ a $T_f = T_g$. Ukažte, že $f = g$ skoro všude.
15. Ukažte, že formule

$$T(\varphi) := \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

   definuje distribuci.

16. Ukažte, že formule

$$T(\varphi) := \lim_{\varepsilon\to 0+} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{n\pi-\frac{\pi}{2}}^{n\pi-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{\sin x} dx + \int_{n\pi+\varepsilon}^{n\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(x)}{\sin x} dx$$

   definuje distribuci $p.v.\frac{1}{\sin x}$.

17. A co formulka
$$T(\varphi) := \lim_{\varepsilon \to 0+} \Big(\int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(0) \log \varepsilon \Big) \ ?$$
18. Definuje
$$T(\varphi) := \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$
distribuci na $\mathbb{R}$? A definuje distribuci na $(0, \infty)$?
19. Obecněji, jak je to s předpisem
$$T(\varphi) := \sum_{n=0}^{\infty} (D^{\alpha_n} \varphi)(x_n) \ ,$$
kde α_n jsou multiindexy a $\{x_n\}$ je posloupnost bodů v Ω, která nemá hromadné body.
20. Dána distribuce $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ a $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Existuje $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ tak, aby $\alpha T = S$? Ukažte, že jediné řešení je $\frac{1}{\alpha} S$ pokud $\alpha > 0$ všude. Obecně může být řešení víc, např. $xT = T_1$ právě tehdy, když existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $T = T_{\frac{1}{x}} + cT_{\delta_0}$.
21. Ukažte, že
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta''_{x-2\pi n} = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cos(nx) \ .$$
22. Ať $f \in L^1(\mathbb{R})$ spojitá a $\int_{\mathbb{R}} f = 1$. Pak $nf(nx) \to \delta_0$.
23. Ať $T_n \to T$ v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Pak $T_n' \to T'$. Dokažte a aplikujte na funkci $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$. Tak dokážete, že δ' je limitou funkcí.
23. Spočtěte $\lim \sqrt{n} e^{-nx^2}$ v distribucích.
24. Ukažte, že distribuce $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ je generovaná mírou právě tehdy, když $T(\varphi) \geq 0$ pro každou $\varphi \geq 0$ ležící v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.
25. Ať u a f jsou lokálně integrovatelné funkce na (a, b) a $u' = f$ ve smyslu distribucí. Ukažte, že existuje absolutně spojitá funkce v a konstanta c tak, že $u = v + c$ skoro všude na (a, b).
26. Ať $f_n, f \in L^1$ a $\lim_n \int_K |f_n - f| \to 0$ pro každý kompakt K. Ukažte, že $T_{f_n} \to T_f$.
27. Ukažte, že $\frac{\sin nx}{\pi x} \to \delta_0$ pro $n \to \infty$.
28. Ať f je 2π–periodická funkce na $\mathbb{R}$ definovaná jako
$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x) \ , & x \in (0, \pi] \ , \\ -\frac{1}{2}(\pi + x) \ , & x \in [-\pi, 0) \ , \\ 0 \ , & x = 0 \ . \end{cases}$$
Ukažte, že
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$
ve smyslu distribucí. Dále derivace f je 2π–periodická míra, jejíž restrikce na $[-\pi, \pi]$ je $-\frac{1}{2} + \delta_0$. A nakonec ukažte, že platí
$$(T_f)' = \sum_{k=1}^{\infty} T_{\cos kx} \ .$$

4.8 Konvoluce

1. Konvoluce pro funkce z L^p:
   (a) Ukažte, že
   $$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p \ ,$$
   pokud $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$.
   (b) Pro $p = 1$ a $p = \infty$ může v (a) nastat rovnost. Najděte podmínky, kdy rovnost platí.

(c) Pokud $1 < p < \infty$ a v (a) nastává rovnost, je f nebo g rovna 0 skoro všude.

(d) Ukažte, že $\varepsilon > 0$ existuje $f \in L^1$ a $g \in L^p$ tak, že

$$\|f * g\|_p > (1 - \varepsilon)\|f\|_1 \|g\|_p \,.$$

(e) Ukažte, že $f * g$ je stejnoměrně spojitá, pokud $f \in L^p$, $g \in L^q$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Je-li navíc $1 < p < \infty$, je $f * g \in \mathcal{C}_0$, což obecně neplatí pro $f \in L^1$ a $g \in L^\infty$.

(f) Najděte netriviální $f, g \in L^1$ tak, že $f * g = 0$. (Počkejte na Fourierovu transformaci.)

(g) Pokud $f \in L^1$ a $f * f = f$, je $f = 0$. Dokažte.

(e) Pokud $f \in L^1$ a $f * f = 0$, je $f = 0$. Dokažte.

4. Spočtěte:

$$H(x) \sin x * H(x) \cos x \,, \qquad e^{-|x|} * e^{-|x|} \,,$$
$$H(x) \sin x * H(x) \sin x \,, \qquad \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} * \frac{1}{\pi} \frac{\beta}{x^2 + \beta^2} \,, \ \alpha, \beta > 0 \,,$$
$$H(x) * H(x) \,,$$

kde $H = 1$ pro $x > 0$ a $H = 0$ jinak.

2. Banachova algebra měr:

(a) Ukažte, že $\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^n)$ tvoří komutativní Banachovu algebru s jednotkou.

(b) Ukažte, že diskrétní míry tvoří podalgebru $\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^n)$. Je uzavřená?

(c) Ukažte, že spojité míry tvoří ideál, tj. je to vektorový prostor, který je uzavřený na násobení.

(d) Ukažte, že absolutně spojité míry (vzhledem k Lebesgueově míře) tvoří ideál, který je izomorfní s $L^1(\mathbb{R}^n)$. Je tento ideál uzavřený?

4.9 Temperované distribuce a Fourierova transformace

1. Dokažte, že $\mathscr{S} \subset L^1$, $L^1 \subset \mathscr{S}'$ a $L^\infty \subset \mathscr{S}'$.
2. Spočtěte Fourierovu transformaci funkce $H(1 - |x|)$, kde H je Heavisidova funkce.
3. Spočtěte inverzní Fourierovu transformaci temperované distribuce e^{-ax^2}, $a > 0$.
4. Spočtěte $\widehat{T}$, kde

$$T(\varphi) := \int_{\partial B(0,1)} \varphi(x) dS(x) \,,$$

kde $B(0, 1)$ je jednotková koule v $\mathbb{R}^3$.

5. Najděte posloupnost $T_n \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ takovou, že konverguje k 0 v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, ale nekonverguje k nule v $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.
6. Ať $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ je 2π–periodická funkce a $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikx}$ je její Fourierova řada. Spočtěte $\hat{f}$.
7. Ukažte, že pro funkce $f \in L^1(\mathbb{R})$ platí

$$\widehat{T}_f = T_{\hat{f}} \,.$$

8. Spočtěte $\widehat{T}_{\delta_0}$ a $\widehat{T}_1$.
9. Ať p je polynom na $\mathbb{R}$. Je T_p temperovaná distribuce?
10. Spočtěte Fourierovu transformaci funkce $\hat{f}$, kde $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
11. Najděte funkci f, která splňuje

$$-\triangle \hat{f} + \hat{f} = \delta$$

v $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$.

12. Ukažte, že e^x není temperovaná distribuce na $\mathbb{R}$, zatímco $e^x \cos(e^x)$ je.

4.10 Fourierova transformace

1. Ať $\hat{f}$ značí Fourieorovu transformaci. Ukažte, že platí

$$\begin{aligned}
&\widehat{f(x)e^{i\alpha x}}(t) = \hat{f}(t-\alpha)\ ,\\
&\widehat{f(x-\alpha)}(t) = \hat{f}(t)e^{-i\alpha t}\ ,\\
&\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}\ ,\\
&\widehat{\overline{f(-x)}}(t) = \overline{\hat{f}(t)}\ ,\\
&\widehat{f(x/\lambda)}(t) = \lambda\hat{f}(\lambda t)\ ,\quad \lambda > 0\ ,\\
&(\hat{f}(t))' = -\widehat{ixf(x)}(t)\ ,\quad \text{je–li } -ixf(x) \in L^1\ .
\end{aligned}$$

Ať $f \in L^1$ je absolutně spojitá na $\mathbb{R}$ a $f' \in L^1$. Pak

$$\widehat{f'}(y) = iy\hat{f}(y);.$$

2. Zobrazení $f \mapsto \hat{f}$ je homomorfismus L^1 do $\mathcal{C}_0$. Ukažte, že není na, nicméně obor hodnot je hustý v $\mathcal{C}_0$.
3. Je-li $f, \hat{f} \in L^1$ a

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)e^{ixt}\,dt\ ,$$

je $g \in \mathcal{C}_0$ a $f = g$ skoro všude.
4. Ať $f \in L^1$, $f > 0$. Ukažte, že platí $|\hat{f}(y)| < \hat{f}(0)$ pro všechny $y \neq 0$.
5. Najděte všechny komplexní homomorfismy na algebře L^1.
6. Ať $g = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_k}$. Najděte vztah mezi $\hat{f}$ a $\hat{g}$.
7. Ukažte, že $F : f \mapsto \hat{f}$ je unitární operátor na L^2. Spočtěte F^4.
8. Najděte a klasifikujte spektrum F.
(Uvažujte funkce $\exp(\frac{x^2}{2})(\frac{d}{dx})^m \exp(-x^2)$).
9. Spočtěte

$$\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} \frac{\sin\lambda t}{t}e^{itx}\,dt\ .$$

10. Spočtěte Fourierovy transformace funkcí

$$\begin{aligned}
k_n(y) &:= \exp(\frac{-|y|}{n})\ ,\\
k_n(y) &:= (1-\frac{|y|}{n})\chi_{[-n,n]}(y)\ ,\\
k_n(y) &:= \exp(-\frac{y^2}{2n^2})\ .
\end{aligned}$$

11. Spočtěte pomocí bodu předchozího

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} (\frac{\sin\alpha y}{y})^2\,dy\\
&\int_{\mathbb{R}} (\frac{\sin\alpha y}{y})^4\,dy\\
&\int_{\mathbb{R}} (\frac{\sin\alpha y}{y})^3\,dy\ .
\end{aligned}$$

12. Ať $g \in L^1$ je dvakrát diferencovatelná a $g', g'' \in L^1$ a g, g' jsou absolutně spojité. Ukažte, že existuje $f \in L^1$ tak, že $\hat{f} = g$. Dále ukažte, že předpoklady na g jsou splněny, pokud $g, g', g'' \in L^1 \cap \mathcal{C}_0$.
13. Ať $F \subset U \subset \mathbb{R}$, kde F je kompaktní a U je otevřená. Ukažte, že existuje $f \in L^1$ tak, že $\hat{f} = 1$ na F a $\hat{f} = 0$ na $\mathbb{R} \setminus U$.
14. Najděte $f \in L^2 \setminus L^1$ tak, aby $\hat{f} \in L^1$.
15. Spočtěte Fourierovu transformaci funkcí

$$\cos(\alpha x)\ ,\quad e^{-\alpha x^2}\ ,\quad \sin(\alpha x)$$