25. Laplaceova transformace.

Definice. Definujeme prostor

$$L^1_+ := \big\{ f(t) : (0,+\infty) \to \mathbb{C} \text{ měřitelná a } \exists\, c \in \mathbb{R},\ f(t)e^{-ct} \in L^1(0,+\infty) \big\} .$$

Poznámky.
- $L^1_+ \subsetneq L^1(0,+\infty)$
- $f \in L^1_+ \implies f \in L^1(0,K)$ pro $\forall K < +\infty$ (tj. je lokálně integrovatelná)
- $f(t) = e^{t^2} \notin L^1_+$

Značení. Pro $f(t) \in L^1_+$ definujeme *abscisu konvergence*

$$c_f = \inf \big\{ c \in \mathbb{R} :\ f(t)e^{-ct} \in L^1(0,+\infty) \big\}$$

Obecně $f(t)e^{-c_f t} \notin L^1(0,\infty)$; pro libovolné $c > c_f$ $f(t)e^{-ct}$ integrovatelné je.

Definice. Laplaceovu transformaci funkce $f(t) \in L^1_+$ definujeme

$$\mathcal{L}\big\{f(t)\big\}[p] = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt \qquad \forall p \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} p > c_f .$$

Poznámky.
- přiřazuje funkci $f(t)$ funkci $F(p)$
- definice je korektní: $|f(t)|e^{-\operatorname{Re} pt}$ integrovatelná majoranta
- souvislost s Fourierovou transformací:

$$F(p) = \big[f(\widehat{x)e^{-\operatorname{Re} px}}\big](\frac{\operatorname{Im} p}{2\pi}) ,$$

přičemž platí (v celé kapitole) následující –

Úmluva. Pro každou $f \in L^1_+$ klademe $f(t) = 0$, je-li $t \le 0$.

Věta 25.1. [Vlastnosti $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.] Nechť $f(t) \in L^1_+$. Potom
(1) $F(p) \in \mathcal{H}\big(\{p \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re} p > c_f\}\big)$
(2) $\frac{d^k}{dp^k} F(p) = \mathcal{L}\big\{(-t)^k f(t)\big\}[p]$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$
(3) $F(p) \to 0$ pro $\operatorname{Re} p \to +\infty$, $\operatorname{Im} p \in \mathbb{R}$ pevné
(4) $F(p) \to 0$ pro $\operatorname{Im} p \to \pm\infty$, $\operatorname{Re} p > c_f$ pevné

Příklady.
- $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}$ $(c_f = 0)$
- $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a}$, $\operatorname{Re} p > a = c_f$
- $\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$, $\operatorname{Re} p > 0 = c_{t^\alpha}$, pro $\alpha > -1$

Opakování. V souvislosti s předchozím příkladem připomeňme, že tzv. *hlavní větev logaritmu* $\mathrm{Ln}(z)$ je definována jako inverzní funkce k $\exp(z)$ restringované na pás $\{-\pi < \mathrm{Im}\, z < \pi\}$.
Platí: $\mathrm{Ln}(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$, $\mathrm{Ln}'(z) = 1/z$ a $\mathrm{Ln}(x) = \ln(x)$ pro $x \in (0, \infty)$.

Věta 25.2. [Škálování a posun L.t.] Nechť $f(t) \in L^1_+$. Potom
(1) $\mathcal{L}\big\{f(\alpha t)\big\}[p] = \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}\big\{f(t)\big\}[p/\alpha]$ pro $\alpha > 0$, $\mathrm{Re}\, p > \alpha c_f$
(2) $\mathcal{L}\big\{f(t-\alpha)\big\}[p] = e^{-\alpha t}\mathcal{L}\big\{f(t)\big\}[p]$ pro $\alpha > 0$, $\mathrm{Re}\, p > c_f$
(3) $\mathcal{L}\big\{e^{at}f(t)\big\}[p] = \mathcal{L}\big\{f(t)\big\}[p-a]$ pro $a \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, a + c_f$

Věta 25.3. [L.t. a derivace.] Nechť $f^{(j)}(t) \in L^1_+ \cap C([0, +\infty))$ pro $j = 0, \ldots, n$. Potom

$$\mathcal{L}\big\{f^{(n)}(t)\big\}[p] = p^n F(p) - \sum_{j=0}^{n-1} p^j f^{(n-1-j)}(0)\,.$$

Speciálně

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\big\{f'(t)\big\}[p] &= pF(p) - f(0)\,,\\ \mathcal{L}\big\{f''(t)\big\}[p] &= p^2F(p) - f'(0) - pf(0)\,.\end{aligned}$$

Definice. Pro $f(t)$, $g(t) \in L^1_+$ definujeme konvoluci

$$\big[f * g\big](t) = \int_0^t f(s)g(t-s)\,ds \qquad t > 0$$

a nula pro $t < 0$.

Poznámka. Díky úmluvě výše (f, $g = 0$ pro $t \le 0$) je tato definice totožná s definicí konvoluce v Kapitole 24.

Lemma 25.1. [Konvoluce v L^1_+.] Nechť f, $g \in L^1_+$. Potom $[f * g](t)$ má smysl pro s.v. t a je prvkem L^1_+. Navíc: $c_{f*g} \le \max\{c_f, c_g\}$.

Věta 25.4. [L.t. a konvoluce.] Nechť $f(t)$, $g(t) \in L^1_+$. Potom

$$\mathcal{L}\big\{[f * g](t)\big\}[p] = \mathcal{L}\{f(t)\}[p]\,\mathcal{L}\{g(t)\}[p]\,, \qquad \mathrm{Re}\, p > \max\{c_f, c_g\}\,.$$

Důsledek. [L.t. primitivní funkce.] Nechť $f(t) \in L^1_+$. Označ $h(t) = \int_0^t f(s)\,ds$. Pozorování: $h(t) = f * Y(t)$, kde

$$Y(t) = \begin{cases} 1, & t > 0,\\ 0, & t < 0.\end{cases}$$

je *Heavisideova funkce.* Výše jsme ukázali, že $\mathcal{L}Y(t) = 1/p$. Tedy $\mathcal{L}h(t)[p] = F(p)/p$. Navíc: $c_h \leq \max\{c_f, 0\}$.

Věta 25.5.[1] [Prostota L.t.]
(1) Nechť $f(t) \in L^1_+$. Jestliže $\exists c_0 \in \mathbb{R}$ tak, že $F(p) = 0$ pro všechna $p \in \mathbb{C}$, splňující $\operatorname{Re} p > c_0$, je $f(t) = 0$ skoro všude. (Tzv. Lerchova věta).
(2) Nechť $f(t), g(t) \in L^1_+$. Jestliže $N = \big\{p \in \mathbb{C};\ F(p) = G(p)\big\}$ má hromadný bod v množině $\big\{p \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} p > \max\{c_f, c_g\}\big\}$, pak $f(t) = g(t)$ skoro všude.

Věta 25.6. [Inverze L.t.] Nechť $F(p) \in \mathcal{H}(\{\operatorname{Re} p > c_0\})$ a platí odhad $|F(p)| \leq A/|p|^2$ pro $|p| > R_0$, $\operatorname{Re} p > c_0$. Označme

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} F(p) e^{pt}\, dp \qquad t \in \mathbb{R},\ \xi > c_0$$

Potom $f(t) = 0$ pro $t < 0$, $f(t) \in L^1_+$ a $\mathcal{L}\{f(t)\}(p) = F(p)$ pro každé $\operatorname{Re} p > c_0$.
Pokud dokonce $F(p) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{p_1, \ldots, p_n\})$, kde $\operatorname{Re} p_j \leq c_0$, přičemž platí odhad $|F(p)| \leq A/|p|$ pro $\operatorname{Re} p < c_0$, $|p|$ velké, pak

$$f(t) = \sum_j \operatorname{res}_{p_j} F(p) e^{tp},$$

pro každé $t > 0$ pevné.

Poznámka. Výše uvedený integrál se rozumí podél křivky $\varphi(\eta) = \xi + i\eta$, kde $\eta \in (-\infty, \infty)$. Jeho hodnota (za předpokladů věty) je konečná a nezávisí na volbě $\xi > c_0$.

[1] Dokázano za silnějšího předpokladu spojitosti f g.