26. Speciální funkce.

Definice. Funkce Gamma (neboli Eulerův integrál 2. druhu) je definována jakožto

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt, \qquad z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} z > 0.$$

Poznámky.
• definice má smysl: $|t^{z-1}e^{-t}| = t^{\operatorname{Re} z-1}e^{-t}$ je integrovatelné na $(0,\infty)$.

• lehce se spočte: $\Gamma(1) = 1$, a dále (per-partes + indukcí) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, obecněji

$$\Gamma(z+n+1) = z(z+1)\dots(z+n)\Gamma(z), \qquad \operatorname{Re} z > 0,\ n \geq 0 \text{ celé}. \tag{1}$$

• speciálně: $\Gamma(n) = (n-1)!$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

• jiné možné vyjádření (substituce $t = u^2$):

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty u^{2z-1}e^{-u^2}du;$$

odtud $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, a dále pomocí (1) odvodíme $\Gamma(n+1/2) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\dots(\frac{1}{2}+n-1)\sqrt{\pi}$.

Motivace. Proč zavádíme Gamma funkci ?
• vyskytuje se přirozeně jako výsledek řady integrálů, např.

$$\int_0^\infty e^{-x^n}dx = \frac{1}{n}\Gamma(\frac{1}{n}), \qquad n > 0$$

(substituce $x^n = t$), dále (viz předchozí kapitola)

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\}[p] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \qquad \operatorname{Re}\alpha > -1.$$

• zobecnění faktoriálu, tedy také (jak uvidíme později) možnost definovat funkce

$$1,\ x,\ \frac{x^2}{2!},\ \dots,\frac{x^n}{n!},\dots \tag{2}$$

pro jiná než $n \geq 0$ celá. K čemu tohle je dobré? Definujme operátor

$$[\mathcal{P}f](t) := \int_0^t f(s)ds,$$

tj. $f \mapsto \mathcal{P}f$ přiřazuje f její primitivní funkci. Vidíme, že $\mathcal{P}f = f * \mathtt{1}$, kde $\mathtt{1}$ je Heavisideova funkce; obecněji

$$[\mathcal{P}^{(n)} f](t) = \mathcal{P}(\mathcal{P} \dots (\mathcal{P}f) \dots) = f * \left(\mathtt{1} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right).$$

kdybychom tedy dokázali definovat funkce (2) pro obecná (necelá, záporná) n, nabízí se možnost jak definovat zcela obecnou (neceločíselnou) primitivní funkci / derivace funkce.

Věta 26.1. $\Gamma(z) \in \mathcal{H}(\Omega_0)$, kde $\Omega_0 = \{ z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z > 0 \}$.

Věta 26.2. Funkci $\Gamma(z)$ lze holomorfně rozšířit na množinu $\tilde{\Omega} = \{ z \in \mathbb{C};\ z \neq 0,\ -1,\ -2, \dots \}$. V bodech mimo $\tilde{\Omega}$ má toto rozšíření jednoduché póly, a

$$\operatorname{res}_{-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2, \dots$$

Poznámky. Toto rozšíření je (ve třídě holomorfních funkcí) jediné možné, a vztah (1) platí pro všechna $z \in \tilde{\Omega}$.
Lze ukázat, že $\Gamma(z)$ je nenulová všude v $\tilde{\Omega}$. Funkce $1/\Gamma(z)$ je (po dodefinování *nulou* v bodech $0,\ -1,\ -2, \dots$) holomorfní v $\mathbb{C}$.

Alternativní definice. Gamma funkci lze také zavést pomocí nekonečných součinů

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{z(z+1) \dots (z+n-1)}$$

viz např. Jarník, Integrální počet II, kapitola XVIII.

Věta 26.3.[1] [Stirlingův vzorec.]

$$\lim_{\mathbb{R} \ni s \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\frac{e}{s} \right)^s \Gamma(s+1) = \sqrt{2\pi};$$

speciálně

$$n! \sim \sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n, \qquad \mathbb{N} \ni n \to \infty.$$

Definice. Funkce Beta (neboli Eulerův integrál 1. druhu) je definována jako

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \qquad \operatorname{Re} p,\ \operatorname{Re} q > 0.$$

[1]Důkaz „formální“ – bez záměny limity a integrálu.

Poznámky.
• definice má smysl: $|t^{p-1}(1-t)^{q-1}| = t^{\operatorname{Re} p-1}(1-t)^{\operatorname{Re} q-1}$ je integrovatelné na $(0,1)$.
• snadno se spočte: $B(p,q) = B(q,p)$, $B(p,1) = B(1,p) = 1/p$.
• vztahy ke Gamma funkci:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \qquad \operatorname{Re} p,\ \operatorname{Re} q > 0;$$
$$B(s,1-s) = \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}, \qquad \operatorname{Re} s \in (0,1).$$

Definice. Besselovou rovnicí řádu $s (\in \mathbb{R})$ rozumíme

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - s^2)y = 0 \tag{Br}$$

Definice. Besselovou funkcí 1. druhu řádu $s (\in \mathbb{R})$ rozumíme

$$J_s(x) := \left(\frac{x}{2}\right)^s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+1+s)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \tag{Bf}$$

s úmluvou $1/\Gamma(n) = 0$ pro $n \leq 0$ celé.

Věta 26.4. [O řešení Besselovy rovnice.] Řada v (Bf) konverguje absolutně pro každé $x \in (0, \infty)$; její součet je nekonečně diferencovatelná funkce, splňující rovnici (Br).

Poznámky.
• úmluva $1/\Gamma(n) = 0$ pro $n \leq 0$ celé je holomorfní dodefinování v bodě odstranitelné singularity – funkce $\Gamma(z)$ má v takovýchto n pól
• řada v (Bf) konverguje samozřejmě pro všechna $x \in \mathbb{C}$; větší opatrnost je třeba při definování x^s – nutný logaritmus pro $s \notin \mathbb{Z}$

Věta 26.5. [Šturmova srovnávací věta.] Nechť $p(x)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$ jsou spojité funkce, $p(x) > 0$. Nechť $u(x)$ je netriviální řešení rovnice

$$\big(p(x)u'\big)' + q_1(x)u = 0;$$

nechť $v(x)$ je řešení rovnice

$$\big(p(x)v'\big)' + q_2(x)v = 0;$$

nechť (klíčový předpoklad)

$$q_2(x) \geq q_1(x).$$

Potom mezi každými dvěma sousedními nulovými body funkce $u(x)$ leží aspoň jeden nulový bod funkce $v(x)$.

Komentář. Rovnice popisují kmitání; klíčový předpoklad: druhá pružina je tužší; závěr: druhá rovnice kmitá alespoň tak často jako první.

Důsledek. Nechť $u(x)$ je netriviální řešení rovnice $u'' + q(x)u = 0$, nechť $a > 0$ je konstanta.
(i) je-li $q(x) \geq a$, pak sousední nulové body $u(x)$ nejsou dále než $\frac{\pi}{\sqrt{a}}$.
(ii) je-li $q(x) \leq a$, pak sousední nulové body $u(x)$ nejsou blíže než $\frac{\pi}{\sqrt{a}}$.

Důsledek. Besselova funkce $J_s(x)$ má v $(0, \infty)$ nekonečně mnoho nulových bodů. Vzdálenost sousedních se blíží k π pro $x \to \infty$.

Poznámky.
• lze dokázat lepší aproximaci:

$$J_s(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \tfrac{\pi}{2}(s + \tfrac{1}{2})\right)$$

pro velká x.
• pro $s \notin \mathbb{Z}$ funkce $\left\{J_s(x), J_{-s}(x)\right\}$ jsou dvě lineárně nezávislá řešení (tedy fundamentální systém) rovnice (Br)
• pro $k \in \mathbb{Z}$ je $J_k(x) = (-1)^k J_{-k}(x)$; druhým LN řešením je Besselova funkce 2. druhu, definovaná

$$Y_k(x) := \lim_{s \to k} \frac{J_s(x)\cos(\pi s) - J_{-s}(x)}{\sin(\pi s)}.$$

Aplikace Besselových funkcí.

• Laplaceovy vzory důležitých funkcí: $\mathcal{L}\{J_0(t)\} = 1/\sqrt{p^2+1}$, obecněji

$$\mathcal{L}\{J_n(t)\} = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}(p + \sqrt{p^2+1})^n}$$

• konstrukce vlastních funkcí laplaciánu na kruhu/kouli