27. Teorie distribucí.

Motivační poznámky. Dosavadní chápání funkce: ,,bodové", tj. přiřazení $x \mapsto f(x)$. Nevýhody: neexistence singulárních objektů (Dirac). Problémy s ,,bodovým" pojetím derivace: není vždy definována, neměří správně velikost nespojitosti, ...

Předběžné úvahy. [Dualita, funkcionál.] Pro f, $g \in L^2(\Omega)$ je definováno

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx$$

Tento výraz lze různě zobecňovat, přičemž f se zlepšuje: $L^\infty(\Omega)$, $C_c(\Omega)$, ..., zatímco g se zhoršuje (zobecňuje): $L^1(\Omega)$, míra na Ω, ...
Definice: je-li X (normovaný) vektorový prostor, pak množinu všech spojitých lineárních zobrazení $F : X \to \mathbb{R}$ nazýváme duálem X a značíme X'. Výše uvedené prostory jsou v (kanonickém) duálním vztahu v následujícím smyslu:
• je-li $T \in \big(L^2(\Omega)\big)'$ pak existuje jediné $g(x) \in L^2(\Omega)$ tak, že $T(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx$ pro každé $f(x) \in L^2(\Omega)$. (V tomto smyslu duálem k L^2 je opět L^2. Obecněji: duálem k L^p je L^q, kde $1/p + 1/q = 1$.)
• je-li $T \in \big(C_c(\Omega)\big)'$ a navíc nezáporný, pak existuje jediná Radonova míra μ na Ω taková, že $T(f) = \int_\Omega f(x)d\mu(x)$ pro každé $f(x) \in C_c(\Omega)$. (Duálem ke spojitým funkcím jsou míry.)

Pozorujeme: čím lepší (hladší) prostor, tím větší (obecnější) duál. V tomto duchu distribuce (tedy duál k C_c^∞) bude zobecnění všech L^p a prostoru měr zároveň.

Úmluva. V celé kapitole je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina.

Opakování. Pro $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definujeme nosič funkce $\operatorname{supp} f$ jako uzávěr množiny

$$\{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) \neq 0\}\,.$$

Ekvivalentně: nosič je nejmenší uzavřená množina K taková, že $f = 0$ na $\mathbb{R}^n \setminus K$.

Multiindexem nazývám n-tici čísel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, kde $\alpha_j \geq 0$ jsou celá. Číslo $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ nazývám výška (stupeň) multiindexu. Pro funkci $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definuji

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\,.$$

Pro vektor $x \in \mathbb{R}^n$ definuji

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}\,.$$

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Prostor testovacích funkcí $\mathcal{D}(\Omega)$ definujeme

$$\mathcal{D}(\Omega) = \big\{\varphi(x) \in C^\infty(\Omega);\ \operatorname{supp}\varphi \text{ je kompaktní podmnožina } \Omega\ \big\}.$$

Říkáme, že funkce φ_n konvergují k nule v prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$, jestliže platí:
(i) existuje $K \subset \Omega$ kompaktní tak, že $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$ pro $\forall n$;

(ii) $D^\alpha\varphi(x) \rightrightarrows 0$ na K pro každý pevný multiindex α.
Obecněji, φ_n konvergují k φ v prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$, jestliže $\varphi_n - \varphi$ konvergují k nule ve smyslu předchozí definice.

Značení. Normu v prostoru $C^k(\Omega)$ definujeme jako

$$\|\phi(x)\|_{C^k(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega}\sup_{|\alpha|\le k}\left|D^\alpha\phi(x)\right|.$$

Tato norma popisuje stejnoměrnou konvergenci všech derivací až do řádu k včetně.
Pro $\varphi(x) \in C^\infty(\Omega)$ mohou být tyto normy nekonečné (např. $\phi(x) = 1/x$ v $\Omega = (0,\infty)$.)
Pro $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$ jsou ovšem nutně konečné a podmínka (ii) v definici konvergence v $\mathcal{D}(\Omega)$ říká, že $\|\varphi_n(x)\|_{C^k(\Omega)} \to 0$ pro každé k pevné.
Nalézt však jednu normu (či metriku), která by popisovala konvergenci v $\mathcal{D}(\Omega)$, není možné – příčinnou je podmínka (i).
Definice. Distribucí v Ω rozumíme spojité lineární zobrazení

$$\begin{aligned} T :&\mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}\\ &\varphi \mapsto \langle T,\varphi\rangle. \end{aligned}$$

Podrobněji řečeno, požadujeme
(i) $\langle T,\varphi_1+\varphi_2\rangle = \langle T,\varphi_1\rangle + \langle T,\varphi_2\rangle$, $\langle T,a\varphi\rangle = a\langle T,\varphi\rangle$;
(ii) $\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$ implikuje $\langle T,\varphi_n\rangle \to 0$.

Množinu všech distribucí v Ω značíme $\mathcal{D}'(\Omega)$. Symbolem $\langle T,\varphi\rangle$ značíme (jak vidno výše) hodnotu distribuce T na testovací funkci φ.

Příklady. ① Je-li $f(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$, pak definujeme $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ předpisem

$$\langle T_f,\varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

Říkáme, že T_f je regulární distribuce s hustotou f.
② Pro libovolný bod $a \in \Omega$ definujeme Diracovu distribuci δ_a předpisem

$$\langle \delta_a,\varphi\rangle = \varphi(a).$$

③ Dirac na sféře $\delta_{S_r} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ je definován jako

$$\langle \delta_{S_r},\varphi\rangle = \int_{S_r}\varphi(x)dS(x),$$

kde $S_r = \{x \in \mathbb{R}^3;\ |x| = r\}$; integrál chápeme jako plošný 1. druhu.
④ Vzorkovací distribuce $V \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ je definována jako

$$\langle V,\varphi\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\varphi(n).$$

⑤ Obecněji, každá „rozumná" míra μ v Ω určuje distribuci T_μ předpisem

$$\langle T_\mu, \varphi \rangle = \int_\mu \varphi(x) d\mu(x).$$

„Rozumná" míra je zhruba taková, že spojité funkce jsou měřitelné a kompaktní množiny mají konečnou míru.
Poznámka. Lze dokázat, že vnoření $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ (realizované zobrazením $f \mapsto T_f$) je prosté v následujícím smyslu: jestliže f, $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ jsou takové, že distribuce T_f a T_g se rovnají, pak nutně $f(x) = g(x)$ skoro všude v Ω.
Značení. Symbolem $G \subset\subset \Omega$ značíme situaci, kdy $\overline{G}$ je kompaktní a $\overline{G} \subset \Omega$.

Věta 27.1. [O lokálně konečném řádu distribuce.] Nechť $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, nechť $G \subset\subset \Omega$ je otevřená množina. Potom existují konstanty $K > 0$ a $m \geq 0$ celé tak, že

$$\big|\langle T, \varphi \rangle\big| \leq K \|\varphi\|_{C^m(G)} \text{ pro } \forall \varphi \in \mathcal{D}(G). \tag{*}$$

Poznámka. Čísla K a m obecně závisí na množině G.

Poznámka. Jestliže pro $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ můžeme v předchozí větě volit číslo m *nezávisle* na množině G, nazýváme T distribucí konečného řádu.
Řádem distribuce nazýváme nejmenší číslo m takové, že platí (*) – konstanta K stále může obecně záviset na množině G.

Příklady. ① regulární distribuce je řádu 0
② Diracova distribuce je řádu 0
③ distribuce $\varphi \mapsto \varphi^{(k)}(0)$ je řádu k; distribuce

$$\varphi \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi^{(n)}(n)$$

nemá konečný řád.

Poznámka. Množina $\mathcal{D}'(\Omega)$ je vektorový prostor: pro T, T_1 a $T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ a $a \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\begin{aligned} \langle T_1 + T_2, \varphi \rangle &:= \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle, \\ \langle aT, \varphi \rangle &:= a \langle T, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Lehce se ověří, že $T_1 + T_2$ resp. aT jsou opět prvky $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definice. Nechť T_n, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Řekneme, že T_n konvergují k T ve smyslu distribucí, jestliže $\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$ pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pevné.

Analogicky: $\sum_k T_k = T$ ve smyslu distribucí, jestliže $\lim_{n \to \infty} \langle \sum_{k=1}^n T_k, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pevné.
Konečně, zobrazení $\lambda \mapsto T_\lambda$ z metrického prostoru Λ do $\mathcal{D}'(\Omega)$ je spojité, jestliže funkce $\lambda \mapsto \langle T_\lambda, \varphi \rangle$ (to je funkce z Λ do $\mathbb{R}$) je spojitá pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pevné.

Věta 27.2. [Úplnost $\mathcal{D}'(\Omega)$.] Nechť $T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je posloupnost distribucí. Nechť pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pevné existuje konečná $\lim_{n\to\infty}\langle T_n, \varphi\rangle$.
Potom: označíme-li tuto limitu jako $\langle T, \varphi\rangle$, je $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Lemma 27.1. Jsou dány posloupnosti $T_k \in \mathcal{D}'(\Omega)$ a $\varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$. Nechť (reálná) posloupnost $\langle T_k, \varphi\rangle$ je omezená pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pevné; nechť $\varphi_k \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$. Potom $\langle T_k, \varphi_k\rangle \to 0$.

Značení. Pro $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ budeme někdy psát $T = T(x)$ nebo $\langle T, \varphi\rangle = \langle T(x), \varphi(x)\rangle_x$, abychom formálně pojmenovali proměnnou $x \in \Omega$. – $T(x)$ tedy *neznačí* hodnotu distribuce T v bodě x; tento pojem *nelze* definovat.

Definice. Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je regulární matice, nechť $b \in \mathbb{R}^n$. Označme $\tilde\Omega = \{Ay + b;\ y \in \Omega\}$. Potom pro $T(x) \in \mathcal{D}'(\tilde\Omega)$ definujeme $T(Ay + b) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ předpisem

$$\langle T(Ay + b), \varphi(y)\rangle_y := \langle T(x), \frac{\varphi(A^{-1}(x - b))}{|\det A|}\rangle_x, \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Poznámka. Předchozí definice je motivována vzorečkem

$$\int_\Omega f(Ay + b)\varphi(y)\,dy = \int_{\tilde\Omega} f(x)\frac{\varphi(A^{-1}(x - b))}{|\det A|}\,dx;$$

tj. pokud $f \in L^1_{loc}(\tilde\Omega)$, tak pro příslušné regulární distribuce platí

$$\langle T_{f(Ay+b)}, \varphi(y)\rangle_y = \langle T(x), \frac{\varphi(A^{-1}(x - b))}{|\det A|}\rangle_x.$$

Příklady. ① $\delta_0(y + b) = \delta_{-b}(y)$
② $\varepsilon^{-n}\delta_0(\varepsilon^{-1}y) = \delta_0(y)$

Lemma 27.2. [O spojitosti duálního zobrazení.] Nechť Ω, $\tilde\Omega \subset \mathbb{R}^n$, nechť $\Phi : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\tilde\Omega)$ je spojité, lineární zobrazení. Definujme $\Phi' : \mathcal{D}'(\tilde\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ předpisem

$$\langle \Phi'(T), \varphi\rangle := \langle T, \Phi(\varphi)\rangle, \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Potom Φ' je spojité lineární zobrazení; speciálně $\Phi'(T) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ pro každé $T \in \mathcal{D}'(\tilde\Omega)$.

Důsledek. Při značení předchozí definice je $T(x) \mapsto T(Ay + b)$ spojité lineární zobrazení z $\mathcal{D}'(\tilde\Omega)$ do $\mathcal{D}'(\Omega)$. Speciálně $T(Ay + b)$ je distribuce v Ω.

Opakování. Je-li $F(x) \in C^1(\overline{M})$, kde $M \subset \mathbb{R}^n$ je „rozumná“ oblast, pak máme Gaussovu větu:

$$\int_M \frac{\partial F}{\partial x_i}\,dx = \int_{\partial M} F\nu_i\,dS,$$

kde nalevo se integruje dle „plošné“ (tj. v obecném případě $n-1$-rozměrné míry přes hranici M, $\nu = (\nu_1, \dots \nu_n)$ je vnější normála.

Volbou $F = fg$, kde f, $g \in C^1(\overline{M})$ dostáváme vzoreček pro integraci per-partes v $\mathbb{R}^n$:

$$\int_M \frac{\partial f}{\partial x_i} g\, dx = \int_{\partial M} f g \nu_i\, dS - \int_M f \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx.$$

Lemma 27.3. Nechť $f(x) \in C^m(\Omega)$, nechť $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$. Potom

$$\int_\Omega (D^\alpha f)\varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f D^\alpha \varphi\, dx$$

pro každý multiindex $|\alpha| \le m$.

Definice. Nechť $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, nechť α je libovolný multiindex. Potom definujeme distribuci $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ předpisem $\varphi \mapsto \langle T, (-1)^\alpha D^\alpha \varphi\rangle$.

Věta 27.3. Pro libovolný multiindex α je D^α spojité lineární zobrazení z $\mathcal{D}'(\Omega)$ do $\mathcal{D}'(\Omega)$; speciálně $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ pro každé α.

Poznámka. Symbol D^α užíváme jak pro klasickou (bodovou) derivaci, tak pro derivaci ve smyslu distribucí. Smysl je jasný z kontextu. – Díky Lemmatu 27.3. víme, že pro hladkou funkci f platí $D^\alpha T_f = T_{D^\alpha f}$.

Příklady. ① $\frac{d}{dx} T_Y = \delta_0$, kde $Y(x)$ je Heavisideova funkce
② $\frac{d}{dx} T_{\ln|x|} = v.p.\frac{1}{x}$, kde

$$\langle v.p.\frac{1}{x}, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

je takzvaná „hlavní hodnota“ (valeur principale) integrálu (Lebesgueovsky neexistujícího).

Opakování. Funkce $f(x) : (a, b) \to \mathbb{R}$ je po částech C^1, jestliže existují body x_j, $j = 1, \dots N$ takové, že f a f' jsou spojité všude mimo x_j, a navíc v bodech x_j mají jednostranné vlastní limity.

Lemma 27.4. Nechť $f(x)$ je po částech C^1 v intervalu (a, b). Potom

$$\frac{d}{dx} T_f = T_{f'} + \sum_j \big\{ f(x_j+) - f(x_j-) \big\} \delta_{x_j},$$

kde f' je bodová derivace f.

Příklad. Uvažujeme funkci $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$, která je 2π- periodická. Její Fourierovy koeficienty jsou $b_k = 0$, $a_0 = 2\pi^2/3$, $a_k = (-1)^k 4/k^2$ pro $k \ge 1$. Rovnost

$$f(x) = \frac{\pi^3}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos kx$$

platí bodově (pro každé pevné x) díky Větě 21.2. Ovšem rovnost (a konvergence) řady platí také v prostoru $L^2(-\pi, \pi)$, díky Větě 21.4. Odsud se snadno vyvodí, že se jedná i o rovnost

ve smyslu distribucí v $\mathbb{R}$, kdy jednotlivé funkce ztotožníme s příslušnými regulárními distribucemi.
Ovšem díky Větě 27.3 můžeme tuto rovnost libovolně derivovat. Tedy

$$\frac{d}{dx}f(x) = \sum_k (-1)^{k+1}\frac{4}{k}\sin kx,$$
$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \sum_k (-1)^{k+1}4\cos kx,$$

přičemž řady vpravo stále konvergují ve smyslu distribucí! Derivace vlevo vypočteme díky Lemmatu 27.4: $\frac{d}{dx}f(x)$ je $2x$ na $(-\pi,\pi)$ a dále rozšíříme 2π-periodicky. Konečně $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ rovná se

$$2 - 4\pi\sum_{j\in\mathbb{Z}}\delta_{(2j+1)\pi}.$$

Opakování. Z prvního semestru víme, že pokud $f'(x) = 0$ v intervalu (a,b), je funkce $f(x)$ v tomto intervalu konstantní. Jinými slovy, derivace určuje funkci až na konstantu. Následující věta nám říká, že distributivní derivace má stejnou vlastnost.

Věta 27.4.[1] Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, souvislá množina. Nechť $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je taková, že $\frac{\partial}{\partial x_j}T = 0$ pro $j = 1,\ldots,n$. Potom existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $T = T_c$.

Definice. Nechť $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, nechť $G \subset \Omega$ je otevřená množina. Řekneme, že T je nulová v G, jestliže $\langle T,\varphi\rangle = 0$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, jejíž nosič je obsažen v G.
Řekneme, že T, $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se rovnají v otevřené množině $G \subset \Omega$, jestliže $T - S$ je nulová v G ve smyslu předchozí definice.
Definujeme nulovou množinu distribuce $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\mathcal{O}_T = \bigcup\big\{G;\ G \subset \Omega \text{ je otevřená a } T \text{ je nulová v } G\ \big\};$$

nosič distribuce jako

$$\operatorname{supp} T = \Omega \setminus \mathcal{O}_T.$$

Jestliže $f \in C^\infty(\Omega)$ a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definujeme distribuci fT předpisem

$$\langle fT,\varphi\rangle = \langle T, f\varphi\rangle, \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Příklady. ① $\operatorname{supp}\delta_a = \{a\}$. Obráceně platí: je-li nosič distribuce T jednobodový, je T nutně tvaru $\sum_{j=1}^N c_j D^{\alpha_j}\delta_a$.
② Příklady součinu: $x\delta_0 = 0$, $x(v.p.\frac{1}{x}) = T_1$.

Příklady. Definovat obecně součin dvou distribucí T, S *nelze*. Přesněji vzato: nelze definovat takový součin, aby byly splněny všechny „rozumné“ požadavky (asociativita,

[1] Důkaz pouze pro $n = 1$.

komutativita) na součin, a zároveň aby bylo možné libovolně derivovat a platilo Leibnizovo pravidlo. (Tzv. Schwartzův výsledek o nemožnosti.)

Poznámky. Nyní usilujeme o slíbené zobecnění funkcí $\frac{x^n}{n!}$, tj. $\frac{x^n}{\Gamma(n+1)}$. Jmenovatel má singularitu v bodě $n = -1$. Ovšem i čitatel zde má singularitu v tom smyslu, že funkce x^n přestává být (lokálně) integrovatelná (a tedy distribuce). Uvidíme, že tyto singularity jsou „odstranitelné“.

Poznámka. Nadále jsou distribuce obecně komplexní, tj. spojité lineární zobrazení $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$. Lze psát $T = T_1 + iT_2$, kde T_1, T_2 jsou reálné distribuce.

Definice. Je-li T distribuce, definujeme komplexně sdruženou distribuci $\overline{T}$ předpisem

$$\langle \overline{T}, \varphi \rangle = \overline{\langle T, \overline{\varphi} \rangle}, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Definice. Parametrickým souborem distribucí (p.s.d.) v Ω rozumíme zobrazení $\lambda \mapsto T_\lambda$, kde $T_\lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ pro každé λ.
Řekneme, že p.s.d. T_λ závisí holomorfně na $\lambda \in \mathcal{O} \subset \mathbb{C}$, jestliže $\lambda \mapsto \langle T_\lambda, \varphi \rangle$ je holomorfní funkce pro každé pevné $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
Řekneme, že p.s.d. T_λ má v bodě λ_0 izolovanou singularitu, jestliže funkce $\langle T_\lambda, \varphi \rangle$ mají tuto vlastnost (pro každé pevné $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$).
Řekneme, že distribuce $T \in \mathcal{D}(\Omega)$ je reziduum p.s.d. T_λ v bodě λ_0, jestliže $\operatorname{res}_{\lambda_0} \langle T_\lambda, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ pro každé pevné $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
Definice. Pro $\lambda \in \mathbb{C}$ pevné definuji funkce

$$x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda, & x > 0 \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Tyto funkce náleží $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ pokud $\operatorname{Re} \lambda > -1$. Příslušné regulární distribuce budeme značit též x_+^λ.
Poznámky. [Vlastnosti x_+^λ.]
① x_+^0 je Heavisideova funkce
② pro $\operatorname{Re} \lambda > 1$ je $x_+^\lambda \in C^1(\mathbb{R})$ a platí

$$\frac{d}{dx} x_+^\lambda = \lambda x_+^{\lambda-1}$$

– rovnost platí bodově a (díky Lemmatu 27.4.) i ve smyslu distribucí.
③ $\lambda \mapsto x_+^\lambda$ je p.s.d., který je holomorfní v $\{\lambda \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} \lambda > -1\}$.
④ ve smyslu násobení distribuce hladkou funkcí platí $x x_+^\lambda = x_+^{\lambda+1}$.

Věta 27.5. P.s.d. x_+^λ lze holomorfně rozšířit na množinu $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$. Toto rozšíření (značené stejně) má následující vlastnosti:

1. pro $k \in \mathbb{N}$ je

$$\operatorname{res}_{\lambda=-k} x_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \left(\frac{d}{dx} \right)^{k-1} \delta_0$$

2. $\frac{d}{dx}x_+^{\lambda+1} = \lambda x_+^\lambda$, $-\lambda \notin \mathbb{N}$

3. $x x_+^\lambda = x_+^{\lambda+1}$, $-\lambda \notin \mathbb{N}$

Definice. Pro $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$ definujeme distribuce $\chi_+^\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\chi_+^\lambda = \frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}.$$

Zjevně se jedná o p.s.d., který závisí holomorfně na $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$.

Věta 27.6. Pokud dodefinujeme

$$\chi_+^{-k} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{k-1} \delta_0,$$

závisí χ_+^λ holomorfně na $\lambda \in \mathbb{C}$. Platí

$$\frac{d}{dx}\chi_+^\lambda = \chi_+^{\lambda-1}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Poznámka. Analogicky zavedeme distribuce x_-^λ

$$\langle x_-^\lambda, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^0 (-x)^\lambda \varphi(x) dx, \qquad \operatorname{Re}\lambda > -1;$$

poté rozšíříme pro všechna $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$. Dále definujeme

$$|x|^\lambda = x_+^\lambda + x_-^\lambda, \qquad |x|^\lambda \operatorname{sgn} x = x_+^\lambda - x_-^\lambda.$$

Poznámka. Dalším cílem je definovat Fourierovu transformaci distribucí. (Zopakujte si kapitolu 24 minulého semestru!) – Lemma 24.4. nám říká, v jazyce distribucí, že

$$\langle T_{\hat{f}}, \varphi\rangle = \langle T_f, \hat{\varphi}\rangle$$

Nabízí se proto definovat Fourierovu transformaci distribuce T jako

$$\langle \hat{T}, \varphi\rangle = \langle T, \hat{\varphi}\rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Je zde ovšem háček: díky Větě 24.6. víme, že pokud $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ a také $\hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, je už nutně $\varphi = 0$. Řešením je nahradit $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ Schwartzovým prostorem „rychle klesajících funkcí“ $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Tím získáme menší prostor „temperovaných“ distribucí, na kterém vše už funguje dobře.

Definice. Schwartzův prostor „rychle klesajících funkcí“ definujeme jako

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ x^\alpha D^\beta \varphi(x) \ \text{ omezená pro } \ \forall\ \alpha,\ \beta\right\}.$$

Řekneme, že $\varphi_n \to 0$ v $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, jestliže $x^\alpha D^\beta \varphi_n(x) \rightrightarrows 0$ v $\mathbb{R}^n$ pro všechna α, β.

Věta 27.7. [Vlastnosti Schwartzůvova prostoru.]

1. $\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \implies \varphi_n \to 0$ v $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$
2. zobrazení $\varphi(x) \mapsto x^\alpha \varphi(x)$ a $\varphi(x) \mapsto D^\beta \varphi(x)$ jsou spojitá z $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ do $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$
3. $\mathcal{F}$ je lineární, spojité, vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ na sebe

Definice. Temperovanou distribucí v $\mathbb{R}^n$ rozumíme spojité, lineární zobrazení

$$T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}(\mathbb{C}),$$
$$\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle.$$

Prostor temperovaných distribucí značíme $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Konvergencí $T_n \to T$ v $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ rozumíme, že $\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$ pro každé $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Poznámky. ① $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, neboli temperovaná distribuce je distribuce.
② Leč ne každá distribuce je temperovaná distribuce. Například funkce $f(x) = \exp(2x^2)$ je lokálně integrovatelná, tedy $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, avšak $T_f \notin \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.
③ Lze dokázat: pokud $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pro nějaké p, tedy $f(x)$ je *globálně* integrovatelná, pak už $T_f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
Obecněji, pokud $f(x)$ je měřitelná funkce a existuje $N > 0$ takové, že funkce $(1 + |x|^2)^N |f(x)|$ je omezená, pak $T_f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. (Takové funkce f se nazývají „pomalu rostoucí“ nebo též „moderované“ funkce.)
Také distribuce s kompaktním nosičem jsou temperované (přesněji řečeno, lze je přirozeně rozšířit na temperované distribuce).

Lemma 27.2-S.[2] Nechť $\Phi : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ spojité, lineární zobrazení. Definujeme duální zobrazení $\Phi' : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ jako

$$\langle \Phi'(T), \varphi \rangle = \langle T, \Phi(\varphi) \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Potom Φ' je spojité, lineární zobrazení; speciálně $\Phi'(T) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ pro každé $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$

Poznámky. Pomocí předchozího lemmatu se lehce ověří, že následující operace jsou korektně definované pro libovolnou temperovanou distribuci $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$:
① Derivace $D^\alpha T$, kde

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = \langle T, (-1)^\alpha D^\alpha \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

② Záměna proměnné $T(Ax + b)$, kde

$$\langle T(Ay + b), \varphi(y) \rangle_y := \langle T(x), \frac{\varphi(A^{-1}(x - b))}{|\det A|} \rangle_x, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

③ Součin ωT, kde ω je nekonečně hladká, pomalu rostoucí funkce, kde klademe

$$\langle \omega T, \varphi \rangle = \langle T, \omega \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

[2] Bez důkazu.

Definice. Nechť $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ je temperovaná distribuce. Potom definujeme její Fourierovu transformaci $\hat{T} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ jako

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Příklady. ① $\widehat{\delta_a} = \exp(-2\pi i a \xi)$; speciálně $\widehat{\delta_0} = 1$.
② $\widehat{\left(v.p.\frac{1}{x}\right)} = -i\pi \operatorname{sgn} x$

Věta 27.8. $T \mapsto \hat{T}$ je lineární, spojité, vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ na sebe.

Poznámka. Pro $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ definujeme dále inverzní Fourierovu transformaci $\check{T} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ předpisem

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Platí též, že $T \mapsto \check{T}$ je lineární, spojité, vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ na sebe. Dále $\big(\hat{T}\big)\check{} = \big(\check{T}\big)\hat{} = T$ pro každé $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Věta 27.9. Nechť $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Potom:

1. $\check{T}(x) = \hat{T}(-x)$
2. $\overline{\check{T}} = \hat{\overline{T}}$, $\overline{\hat{T}} = \check{\overline{T}}$
3. $\hat{T}(y-a) = \big[\exp(2\pi i(a,x))T(x)\big]\hat{}(y)$
4. $\big[T(x-a)\big]\hat{}(y) = \exp(-2\pi i(a,y))\hat{T}(y)$
5. $\big[T(\varepsilon x)\big]\hat{}(y) = |\varepsilon|^{-n}\hat{T}(\varepsilon^{-1}y)$
6. Je-li T sudá (lichá, radiálně symetrická), má $\hat{T}$ stejnou vlastnost.
7. $\big[D^\alpha T\big]\hat{}(y) = (2\pi i y)^\alpha \hat{T}(y)$
8. $D^\beta \hat{T}(y) = \big[(-2\pi i x)^\beta T(x)\big]\hat{}(y)$

Příklady. ① $\big[\exp(2\pi i(a,x))\big]\hat{} = \delta_a$; odsud pak

$$\big[\cos(b,x)\big]\hat{} = \frac{1}{2}\big(\delta_{b/2\pi} + \delta_{-b/2\pi}\big)$$
$$\big[\sin(b,x)\big]\hat{} = \frac{1}{2i}\big(\delta_{b/2\pi} - \delta_{-b/2\pi}\big)$$

② Pro Heavisideovu funkci Y platí:

$$\hat{Y}(x) = \frac{1}{2\pi i}\big(v.p.\frac{1}{x}\big) + \frac{1}{2}\delta_0(x)$$

Poznámky. Nechť $f(x) : \Omega_1 \to \mathbb{R}$, $g(y) : \Omega_2 \to \mathbb{R}$. Potom definuji tenzorový součin $f \otimes g$ jakožto funkci z $\Omega_1 \times \Omega_2$ do $\mathbb{R}$ předpisem

$$\big(f \otimes g\big)(x,y) = f(x)g(y).$$

Jsou-li f, g lokálně integrovatelné na Ω_1, Ω_2, je také $f \otimes g$ lokálně integrovatelná na $\Omega_1 \times \Omega_2$ a pro příslušnou regulární distribuci platí

$$\begin{aligned}
\langle T_{f\otimes g}, \varphi\rangle &= \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x)g(y)\varphi(x,y)dxdy \\
&= \int_{\Omega_1} f(x) \left(\int_{\Omega_2} g(y)\varphi(x,y)dy \right) dx \\
&= \int_{\Omega_2} g(y) \left(\int_{\Omega_1} f(x)\varphi(x,y)dx \right) dy
\end{aligned}$$

díky Fubiniho větě. Druhý a třetí řádek lze také napsat jako

$$\langle T_f(x), \langle T_g(y), \varphi(x,y)\rangle\rangle \qquad \text{respektive} \qquad \langle T_g(y), \langle T_f(x), \varphi(x,y)\rangle\rangle.$$

To motivuje následující definici.

Definice. [Tenzorový součin distribucí.] Nechť $T(x) \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, nechť $S(y) \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$, kde $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené množiny. Pak definujeme distribuci $T \otimes S \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ předpisem

$$\langle T \otimes S, \varphi\rangle = \langle T(x), \langle S(y), \varphi(x,y)\rangle\rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

Poznámka. Nebudeme ověřovat, že se jedná o korektně definovanou distribuci. Též následující větu ponecháme bez důkazu.

Věta 27.10.[3] [Vlastnosti tenzorového součinu distribucí.] Nechť T a S jsou jako v předchozí definici. Potom:

1. $\langle T(x), \langle S(y), \varphi(x,y)\rangle\rangle = \langle S(y), \langle T(x), \varphi(x,y)\rangle\rangle$ (tzv. distributivní Fubiniho věta)
2. $\operatorname{supp} \big(T \otimes S\big) \subset \operatorname{supp} T \times \operatorname{supp} S$
3. $T_n \to T$ v $\mathcal{D}'(\Omega_1) \implies T_n \otimes S \to T \otimes S$ v $\mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$
4. $D_x^\alpha\big(T \otimes S\big) = \big(D_x^\alpha T\big) \otimes S$, $D_y^\beta\big(T \otimes S\big) = T \otimes \big(D_y^\beta S\big)$

Příklad. Pro $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ je $\delta_a \otimes \delta_b = \delta_{(a,b)}$, kde vpravo máme Diraca v bodě $(a,b) \in \mathbb{R}^{m+n}$.

Poznámky. Konvoluce funkcí $f(x)$, $g(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ je definována jako

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy.$$

[3] Bez důkazu.

Je to asociativní a komutativní operace. Platí, že $f * g$ je tak hladká jako f a g dohromady. Při aplikování libovolné derivace máme

$$D^\alpha\big\{f * g\big\} = D^\alpha f * g = f * D^\alpha g.$$

Další klíčovou vlastností je

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}.$$

Naším cílem je zavést konvoluce distribucí. Protože se jedná o nelineární operaci, nepůjde to bez dodatečných omezení.

Motivační výpočet 1. Jsou-li $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, je také $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a v jazyce distribucí

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \langle T_f(y), g(x-y)\rangle_y.$$

To motivuje následující definici.

Definice. [Konvoluce distribucí – 1. verze] Nechť $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Potom definujeme konvoluci $T * \varphi$ předpisem

$$T * \varphi(x) := \langle T(y), \varphi(x-y)\rangle_y.$$

Věta 27.11. [4] Nechť $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Potom $T * \varphi(x)$ je C^∞ a platí

$$D^\alpha\big\{T * \varphi\big\}(x) = D^\alpha T * \varphi(x) = T * D^\alpha \varphi(x)$$

pro každé x, α.

Motivační výpočet 2. Jsou-li f, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, je také $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a pro $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ máme (s použitím Fubiniho věty)

$$\langle T_{f*g}, \varphi\rangle = \iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(y)g(x)\varphi(x,y)\,dxdy = \langle T_f \otimes T_g, \varphi(x+y)\rangle.$$

Problém: $\varphi(x+y)$ není testovací funkce v $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, neboť nemá omezený nosič. Je-li totiž nosič funkce $\varphi(x)$ obsažen v kouli $B(0,R)$, má $\varphi(x+y)$ nosič v neomezeném pásu

$$\Omega_R := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n;\ |x-y| < R\big\}.$$

To motivuje následující definici.

Definice. [Konvoluce distribucí – 2. verze] Nechť T, $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Nechť je splněna dodatečná podmínka:

$$\operatorname{supp}(T \otimes S) \cap \Omega_R \text{ je omezená množina pro každé } R > 0. \tag{1}$$

[4] Bez důkazu.

Potom definujeme konvoluci $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ předpisem

$$\langle T * S, \varphi \rangle := \langle T \otimes S, \eta\varphi(x+y) \rangle,$$

kde $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ je volena tak, že $\eta \equiv 1$ na množině $\operatorname{supp}(T \otimes S) \cap \operatorname{supp} \varphi(x+y)$.

Poznámka. Opět by bylo třeba dokázat, že $T * S$ je korektně definovaná distribuce; speciálně že definice nezávisí na bližší volbě funkce η.
Podmínka (1) je splněna například v těchto situacích:

- jedna z distribucí T, S má omezený nosič
- distribuce T, S mají jednostranně omezený nosič (obě z téže strany)

Věta 27.12. [5] Nechť distribuce T, S splňují podmínky předchozí definice. Potom

1. $T * S = S * T$ (komutativita)
2. Pokud navíc alespoň dvě z distribucí T, S, R mají omezený nosič, pak $T * (S * R) = (T * S) * R$ (asociativita)
3. pro libovolné α platí
$$D^\alpha \big\{T * S\big\} = D^\alpha T * S = T * D^\alpha S.$$
4. $\operatorname{supp} T * S \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} S$; množinou vpravo míníme $\{a + b;\ a \in \operatorname{supp} T,\ b \in \operatorname{supp} S\}$.

Příklady. ① $T * \delta_0 = \delta_0 * T = T$
② $T * D^\alpha \delta_0 = D^\alpha T$
③ $T * \delta_a(x) = T(x - a)$
④ $1 * (\frac{d}{dx}\delta_0 * h) = 1$, zatímco $(1 * \frac{d}{dx}\delta_0) * h = 0$ (srovnej bod 2 předchozí věty)

Poznámka. Pokud T je temperovaná distribuce a S je distribuce s kompaktním nosičem, definujeme $T * S$ formálně stejně jako výše.

Lze dokázat, že $T * S$ je opět temperovaná distribuce a

$$\widehat{T * S} = \hat{T}\hat{S}.$$

Součin vpravo má smysl, protože kompaktnost nosiče S zaručuje, že to je také temperovaná distribuce; navíc $\hat{S}$ je nekonečně hladká a pomalu rostoucí funkce.

Zavedení necelých derivací. Pro libovolnou distribuci $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, jejíž nosič je zleva omezený, a pro libovolné $\lambda \in \mathbb{C}$ definujeme

$$d^\lambda g := g * \chi_+^{-1-\lambda}.$$

Z vlastností distribucí χ_+^λ, zavedených výše, lze ukázat:

[5] Bez důkazu.

- $d^k g = \left(\frac{d}{dx}\right)^k g$, $k \geq 0$ celé
- $d^{-1} g$ je „primitivní distribuce“, tj. $\frac{d}{dx}\big(d^{-1} g\big) = g$
- obecně platí $d^\lambda (d^\mu g) = d^{\lambda+\mu} g$ pro libovolná λ, $\mu \in \mathbb{C}$
- navíc $\lambda \mapsto d^\lambda g$ je p.s.d. který závisí holomorfně na $\lambda \in \mathbb{C}$.

Konkrétně: pokud $s \in [0,1]$, tak $d^{-s} g$ (neboli s-tá primitivní funkce) je konvoluce g s (lokálně integrovatelnou) funkcí $x_+^{s-1}/\Gamma(s)$. Naopak $d^s g$ lze chápat jako $d^{s-1} d^1 g = d^{-(1-s)} \frac{d}{dx} g$; tj. necelá primitivní funkce od první derivace g.