28. Aplikace teorie distribucí.

V kapitole se budeme zabývat úlohami tvaru

$$\mathscr{D}[u] = f, \tag{1}$$

kde $\mathscr{D}$ je diferenciální operátor s konstantními koeficienty. Příkladem může být „tepelný operátor“ $\partial_t - \Delta_x$.

Definice. Funkce U se nazývá fundamentálním řešením (též Greenovou funkcí) úlohy (1), jestliže $\mathscr{D}[U] = \delta_0$, kde δ_0 je Dirac v počátku.

Motivace. Z vlastností konvoluce plyne, že

$$\mathscr{D}[U * f] = \mathscr{D}[U] * f = \delta_0 * f = f.$$

Tedy: známe-li fundamentální řešení, umíme řešit (1) pro libovolnou pravou stranu. Podobně lze pomocí f.ř. řešit (1) také s předepsanou počáteční podmínkou atd. Poznamenejme, že f.ř. není obecně určeno jednoznačně.

Věta 28.1. Nechť y je řešení rovnice

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots a_n y = 0, \tag{2}$$

s počáteční podmínkou

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-2)}(0) = 0, \qquad y^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_0}.$$

Potom funkce[1]

$$x(t) := y(t)Y(t)$$

je fundamentální řešení rovnice (2).

Příklady. ① $x(t) = \mathrm{e}^{-at}Y(t)$ je f.ř. rovnice $y' + ay = 0$.
② $x(t) = \frac{\sin at}{a}Y(t)$ je f.ř. rovnice $y'' + a^2 y = 0$.
Funkce $y(t) := x * f(t)$ řeší dané rovnice s pravou stranou $f(t)$ pro $t > 0$ a (v případě regulární f) s nulovými počátečními podmínkami v bodě $t = 0+$.

Věta 28.2. Funkce

$$G(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,Y(t)$$

je fundamentální řešení rovnice vedení tepla

$$\partial_t u - \Delta u = 0$$

pro $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$. Dále platí

$$\hat{G}(\xi,t) = \mathrm{e}^{-4\pi|\xi|^2 t}\,Y(t).$$

Značení. Definujeme $\mathbb{R}^{n+1}_+ := \mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$.

Poznámky. Funkce $G(x,t)$ (zvaná též „tepelné jádro“) má tyto vlastnosti:

[1] V celé kapitole $Y(t)$ značí Heavisideovu funkci.

1. je kladná a nekonečně hladká v $\mathbb{R}^{n+1}_+$
2. $\int_{\mathbb{R}^n} G(y,t)dy = 1$ pro každé $t > 0$ pevné
3. $(\partial_t - \Delta)G = 0$ v $\mathbb{R}^{n+1}_+$
4. $\lim_{t\to 0+} G(x,t) = \delta_0(x)$ ve smyslu distribucí

Věta 28.3. Nechť $u_0(x) \in C_b(\mathbb{R}^n)$. Definujme

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t)u_0(y)dy.$$

Potom platí:

1. u je nekonečně hladká, omezená v $\mathbb{R}^{n+1}_+$; platí

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+} |u(x,t)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u_0(x)|.$$

2. $\partial_t u - \Delta u = 0$ v $\mathbb{R}^{n+1}_+$
3. $\lim_{t\to 0+} u(x,t) = u_0(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$

Poznámka. Předchozí věta zaručuje *existenci* řešení pro tzv. Cauchyovu úlohu (tj. $x \in \mathbb{R}^n$)

$$\partial_t u - \Delta u = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x). \tag{3}$$

Je poněkud překvapující, že tento problém není *jednoznačně* řešitelný. Netriviální řešení s nulovou počáteční podmínkou sestrojil Tichonov v roce 1935. – Úloze fakticky chybí ,,okrajová podmínka“; pokud bychom navíc kupříkladu požadovali, že řešení jsou *omezená* pro $|x| \to \infty$, lze už dokázat jednoznačnost.

Věta 28.4. Nechť $f(x,t) \in C^2_b(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty))$. Definujme

$$u(x,t) = \iint_{\mathbb{R}^n\times(0,t)} G(x-y,t-s)f(y,s)dyds.$$

Potom:

1. funkce u, $\partial_t u$ a $D^\alpha_x u$ jsou spojité v $\mathbb{R}^{n+1}_+$ a platí

$$\sup_{\mathbb{R}^n\times[0,T]} |u| \leq T \sup_{\mathbb{R}^n\times[0,T]} |f|.$$

2. $\partial_t u - \Delta u = f$ v $\mathbb{R}^{n+1}_+$
3. $\lim_{t\to 0+} u(x,t) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$

Poznámka. Na rozdíl od Věty 28.3 je potřeba větší hladkost f a řešení lze libovolně derivovat jen podle x. Jinými slovy; časové neregularity f mohou vytvořit neregularity řešení u.

Poznámka. Kombinací Vět 28.3 a 28.4 (a vzhledem k linearitě problému) plyne existence řešení pro obecný problém

$$\partial_t u - \Delta u = f, \qquad u(x,0) = u_0(x), \tag{4}$$

pokud u_0 a f mají předepsanou regularitu.

Definice. Označme $Q_T := \Omega \times (0,T)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast, $T > 0$. Uvažujeme rovnici vedení tepla (RVT) v následujícím tvaru:

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f(x,t), && (x,t) \in Q_T, && \text{(RVT-1)} \\ u(x,0) &= u_0(x), && x \in \Omega, && \text{(RVT-2)} \\ u(x,t) &= g(x,t), && (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T] && \text{(RVT-3)} \end{aligned}$$

Tedy (RVT-2) je počáteční podmínka; (RVT-3) je okrajová podmínka (Dirichletova typu), alternativně se uvažuje okrajová podmínka Neumannova typu:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = \nu \cdot \nabla u(x,t) = h(x,t), \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \tag{RVT-3'}$$

kde $\nu = \nu(x)$ je vektor vnější normály k $\partial\Omega$ v bodě x.

Poznámka. Zajímá nás existence a jednoznačnost řešení pro výše uvedený systém. Pro tzv. Cauchyho úlohu (kdy $\Omega = \mathbb{R}^n$, tedy (RVT-3), (RVT-3') nemají smysl) se existence řešení dá ukázat pomocí konvoluce; dokonce se řešení dají napsat vzorečkem, viz Věty 28.3 a 28.4 výše.
Pro jiné typy Ω existují různé metody; poměrně univerzální je tzv. Fourierova metoda separace proměnných, kdy hledáme řešení ve tvaru

$$\sum_k c_k \, \mathrm{e}^{-\lambda_k t} \, u_k(x),$$

přičemž dvojice $\{u_k(x), \lambda_k\}$ řeší úlohu na vlastní čísla

$$-\Delta u = \lambda u, \qquad x \in \Omega.$$

Definice. Funkce u se nazve *klasické řešení* (RVT), pokud u, $\nabla u \in C(\overline{Q}_T)$, $\partial_t u$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ jsou spojité v $\overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$ a rovnice (RVT-1,2,3), respektive (RVT-1,2,3') jsou splněny ve všech požadovaných bodech. Množina

$$\Gamma_T = \big(\overline{\Omega} \times \{0\}\big) \cup \big(\partial\Omega \times [0,T]\big) = \big\{(x,0);\ x \in \overline{\Omega}\big\} \cup \big\{(x,t);\ x \in \partial\Omega,\ t \in [0,T]\big\}$$

je tzv. parabolická hranice; je to přesně množina těch bodů, kde předepisujeme počáteční u_0 a okrajové g nebo h podmínky (RVT).

Věta 28.5. [Princip maxima pro (RVT).] Nechť Ω je omezená; nechť u je klasické řešení (RVT-1,2,3), přičemž $f \leq 0$. Potom

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q_T}} u(x,t) = \max_{x\in\Gamma_T} u(x).$$

Věta 28.5'. [Princip minima pro (RVT).] Nechť Ω je omezená; nechť u je klasické řešení (RVT-1,2,3), přičemž $f \geq 0$. Potom

$$\min_{(x,t)\in\overline{Q_T}} u(x,t) = \min_{x\in\Gamma_T} u(x).$$

Důsledek. (Principu maxima a minima.) Úloha (RVT-1,2,3) má v případě omezenosti Ω nejvýše jedno klasické řešení.

Poznámka. Pro neomezenou Ω princip maxima obecně *neplatí.*

Lemma 28.1. [Energetická rovnost pro (RVT).] Nechť Ω je omezená; nechť u je klasické řešení (RVT-1,2,3) respektive (RVT-1,2,3'), kde $f = 0$ a $g = 0$ respektive $h = 0$. Potom pro každé $\tau \in (0,T]$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u^2(x,\tau)dx + \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla u|^2(x,t)dxdt = \frac{1}{2}\int_\Omega u_0^2(x)dx.$$

Poznámka. Lemma navíc vyžaduje, aby Ω byla „rozumná“ v tom smyslu, že pro ni platí Gaussova věta. Platí i pro Ω neomezenou, je ale třeba navíc předpokládat konečnost uvedených integrálů.

Důsledek. (Lemmatu 28.1.) Úloha (RVT-1,2,3) nebo (RVT-1,2,3') má za předpokladu omezenosti Ω nejvýše jedno klasické řešení.

Definice. Nyní se budeme zabývat vlnovou rovnicí (VR), tedy

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u - \Delta u &= f(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T, && \text{(VR-1)}\\ u(x,0) &= u_0(x), \qquad x \in \Omega, && \text{(VR-2a)}\\ \partial_t u(x,0) &= u_1(x), \qquad x \in \Omega, && \text{(VR-2b)}\\ u(x,t) &= g(x,t), \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T] && \text{(VR-3)} \end{aligned}$$

alternativně se uvažuje okrajová podmínka:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = \nu \cdot \nabla u(x,t) = h(x,t), \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \qquad \text{(VR-3')}$$

kde ν je opět vektor vnější normály k $\partial\Omega$.

Věta 28.6. Fundamentální řešením (VR) neboli řešením rovnice

$$\partial_{tt}u - \Delta u = \delta_{(0,0)}$$

je distribuce $H(x,t)$, kde

$$H(x,t) = \frac{1}{2}\chi_{(-t,t)}(x)Y(t), \qquad n = 1,$$
$$H(x,t) = \frac{1}{2\pi}\frac{Y(t)}{\sqrt{t^2 - x^2}}, \qquad n = 2,$$
$$H(x,t) = \frac{Y(t)}{4\pi t}\delta_{S_t}(x), \qquad n = 3.$$

Komentář: ad $n = 1$: χ_A je charakteristická funkce množiny A; ad $n = 2$: funkci považujeme za nulovou pro $|x| > t$; ad $n = 3$: $\delta_{S_t}(x)$ je „Dirac na sféře“ $|x| = t$, tj. (singulární) distribuce v $\mathbb{R}^3$, definovaná jako

$$\langle \delta_{S_t}, \varphi \rangle = \int_{|x|=t} \varphi(x)dS(x), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3);$$

vpravo je plošný integrál 1. druhu v $\mathbb{R}^3$. Navíc platí

$$\hat{H}(\xi,t) = \frac{\sin 2\pi|\xi|t}{2\pi|\xi|}Y(t)$$

(pro všechna n).

Poznámky. Dále platí, že $H(x,t)$ řeší (VR-1) pro $t > 0$ s nulovou pravou stranou a počáteční podmínkou $u(x,0+) = 0$, $\partial_t u(x,0+) = \delta_0(x)$. Podobně $\partial_t H(x,t)$ řeší (VR-1) pro $t > 0$ s nulovou pravou stranou a počáteční podmínkou $u(x,0+) = \delta_0(x)$, $\partial_t u(x,0+) = 0$. Celkem tedy (alespoň formálně) pro předepsaná data $f(x,t)$, $u_0(x)$ a $u_1(x)$ lze napsat řešení Cauchyho úlohy (VR-1), (VR-2) ve tvaru

$$u = \partial_t H *_x u_0 + H *_x u_1 + H *_{x,t} f$$

kde v posledním případě je konvoluce přes (x,t), v prvních dvou členech jenom přes x při $t > 0$ pevném. Zapsáno podrobně

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t H(y,t)u_0(x-y)dy + \int_{\mathbb{R}^n} H(y,t)u_1(x-y)dy + \iint_{\mathbb{R}^n \times (0,t)} H(y,s)f(x-y,t-s)dyds$$

Věta 28.7.[2]

1. (Varianta $n = 1$). Nechť $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ a $f \in C^1(\mathbb{R} \times [0,+\infty))$. Potom

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(u_0(x-t) + u_0(x+t)\big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)dy + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(y,\tau)dyd\tau$$

je klasické řešení (VR-1,2) v $\mathbb{R} \times (0,+\infty)$.

[2]Bez důkazu a není třeba se ani učit znění.

2. (Varianta $n = 2$). Nechť $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ a $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty))$. Potom

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_{|y|<t}\frac{u_0(x-y)}{\sqrt{t^2-y^2}}dy + \frac{1}{2\pi}\int_{|y|<t}\frac{u_1(x-y)}{\sqrt{t^2-y^2}}dy \tag{5}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{|y|<\tau}\frac{f(t-\tau,x-y)}{\sqrt{\tau^2-y^2}}dy \tag{6}$$

je klasické řešení (VR-1,2) v $\mathbb{R}^2 \times (0, +\infty)$.

3. (Varianta $n = 3$). Nechť $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ a $f \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty))$. Potom

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t}\int_{|y|=t}\left(\frac{u_0}{t} + \frac{\partial u_0}{\partial n}\right)(x-y)dS(y) + \frac{1}{4\pi t}\int_{|y|=t}u_1(x-y)dS(y) \tag{7}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_{|y|=\tau}f(x-y,t-\tau)dS(y)\frac{d\tau}{\tau} \tag{8}$$

je klasické řešení (VR-1,2) v $\mathbb{R}^3 \times (0, +\infty)$.

Definice. Funkce u se nazve *klasické řešení* (VR), pokud u, $\partial_t u$ a $\nabla u \in C(\overline{Q}_T)$, $\partial_{tt} u$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ jsou spojité v $\overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$ a rovnice (VR-1,2,3), respektive (VR-1,2,3') jsou splněny ve všech požadovaných bodech.

Lemma 28.2. [Energetická rovnost pro (VR).] Nechť Ω je omezená; nechť u je klasické řešení (VR-1,2,3) respektive (RVT-1,2,3'), kde $f = 0$ a $g = 0$ respektive $h = 0$. Potom pro každé $\tau \in (0, T]$

$$\int_\Omega \Big\{(\partial_t u)^2(x,\tau) + |\nabla u|^2(x,\tau)\Big\}dx = \int_\Omega \Big\{u_1^2(x) + |\nabla u_0|^2(x)\Big\}dx.$$

Poznámka. Lemma navíc vyžaduje, aby Ω byla ,,rozumná" v tom smyslu, že pro ni platí Gaussova věta. Věta platí i pro Ω neomezenou, je ale třeba navíc předpokládat konečnost uvedených integrálů.

Důsledek. (Lemmatu 28.2.) Úloha (VR-1,2,3) nebo (VR-1,2,3') má za předpokladu omezenosti Ω nejvýše jedno klasické řešení.

Lemma 28.3. [Princip šíření vlny.] Nechť u je klasické řešení (VR); nechť $B(x_0, T) \subset \Omega$ a nechť $f = 0$ na $P(x_0, T)$, kde značíme

$$B(x_0, R) = \big\{x;\ |x - x_0| < R\big\}, \qquad P(x_0, R) = \big\{(x, t);\ |x - x_0| < R - t\big\}.$$

Potom pro každé $\tau \in (0, T]$

$$\int_{B(x_0,T-\tau)} \Big\{(\partial_t u)^2(x,\tau) + |\nabla u|^2(x,\tau)\Big\}dx \le \int_{B(x_0,T)} \Big\{u_1^2(x) + |\nabla u_0|^2(x)\Big\}dx.$$

Důsledek. Nechť u, $\tilde{u}$ jsou klasická řešení (VR). Jestliže jejich počáteční podmínky se shodují v $B(x_0, T) \subset \Omega$ a pravé strany se shodují v $P(x_0, T)$, pak u, $\tilde{u}$ se shodují v $\overline{P(x_0, T)}$.

Důsledek. Cauchyova úloha (tj. případ $\Omega = \mathbb{R}^n$) pro (VR) má nejvýše jedno klasické řešení.

Definice. Laplaceovou respektive Poissonovou rovnicí v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme

$$-\Delta u = 0,$$

respektive

$$-\Delta u = f.$$

Značení. Symbolem α_n, β_n budeme značit objem jednotkové koule respektive povrch jednotkové sféry v $\mathbb{R}^n$. Platí $\beta_n = n\alpha_n$. Lze spočítat $\alpha_n = \pi^{n/2}/\Gamma(n/2+1)$.

Věta 28.8.[3] Fundamentálním řešením Poissonovy rovnice v $\mathbb{R}^n$ je

$$\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln |x|, \qquad n = 2,$$

respektive

$$\Phi(x) = \frac{1}{\beta_n(n-2)} |x|^{2-n}, \qquad n \geq 3.$$

Poznámky.[Vlastnosti $\Phi(x)$.] ① $\Phi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$
② $\nabla\Phi(x) = -\frac{x}{\beta_n |x|^n}$ pro $x \neq 0$; též $\nabla\Phi(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$
③ $\Delta\Phi(x) = 0$ pro $x \neq 0$.

Věta 28.9. Nechť $f(x) \in C^2_c(\mathbb{R}^n)$. Potom $u(x) := f * \Phi(x)$ je $C^2(\mathbb{R}^n)$ a $-\Delta u(x) = f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$.

Definice. Funkce $u(x)$ se nazve *harmonická* v Ω, jestliže $u(x) \in C^2(\Omega)$ a $\Delta u(x) = 0$ pro každé $x \in \Omega$.

Značení. [Průměrové integrály.]

$$\fint_M f(x)dx := \frac{1}{\lambda_n(M)} \int_M f(x)dx, \qquad \fint_{\partial M} f(y)dS(y) := \frac{1}{\sigma_{n-1}(\partial M)} \int_{\partial M} f(y)dS(y),$$

kde λ_n je objem a σ_{n-1} povrch příslušné množiny. Budeme užívat jen případ $M = B(x_0, r)$, kde objem je $\alpha_n r^n$ a povrch hranice je $\beta_n r^{n-1}$.

Věta 28.10. [O průměru harmonické funkce.] Nechť $u(x) \in C^2(\Omega)$. Potom je ekvivalentní:
(1) $u(x)$ je harmonická v Ω
(2) pro každou kouli $B(x_0, R) \subset \Omega$ platí

$$u(x_0) = \fint_{\partial B(x_0,R)} u(y)dS(y)$$

[3] Bez důkazu; resp. plyne z důkazu následující věty.

(3) pro každou kouli $B(x_0, R) \subset \Omega$ platí

$$u(x_0) = \fint_{B(x_0,R)} u(x)dx$$

Věta 28.11. [Princip maxima pro harmonické funkce.] Nechť $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, kde Ω je omezená. Označme $M := \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x)$.

1. Je-li $-\Delta u \leq 0$ v Ω, pak $M = \max_{x\in\partial\Omega} u(x)$.

2. Je-li $\Delta u = 0$ v Ω a existuje-li $x_0 \in \Omega$ tak, že $u(x_0) = M$, pak nutně $u \equiv M$ v $\overline{\Omega}$.

Definice. Klasická Dirichletova úloha: je dána oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a spojitá funkce $g(x) : \partial\Omega \to \mathbb{R}$. Najděte $u(x)$ harmonickou v Ω a spojitou v $\overline{\Omega}$ takovou, že $u(x) = g(x)$ pro $x \in \partial\Omega$.

Poznámky. Z principu maxima (Věta 28.11) plyne snadno, že klasická Dirichletova úloha má nejvýše jedno řešení. Existence řešení je zaručena, pokud $\partial\Omega$ je „rozumná“. V mnoha speciálních případech (Ω je kruh, vnějšek kruhu, poloprostor, ...) lze řešení Dirichletovy úlohy napsat vzorečkem, typicky opět jako konvoluci g a příslušné Greenovy funkce.

Poznámky. V dalším se omezíme na situaci $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Funkci $(x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y))$ jdoucí z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ budeme přirozeně (a bez zvláštního značení) ztotožňovat s funkcí $z \mapsto f(z)$ jdoucí z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$, kde $z = x + iy$ a $f = f_1 + if_2$.

Definice. Nechť Ω, $G \subset \mathbb{R}^2$ jsou oblasti. Funkce $f : \Omega \to G$ se nazve konformní, jestliže:

1. f je vzájemně jednoznačná (tj. prostá a „na“)

2. f je holomorfní v Ω

3. $f'(z) \neq 0$ všude v Ω

Poznámky. Z poznatků kapitoly 23 plyne, že konformní funkce má dále tyto vlastnosti:
① platí Cauchy-Riemannovy podmínky (Věta 23.2)

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Derivaci vzhledem ke komplexní proměnné lze vyjádřit jako

$$f'(z) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + i\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} - i\frac{\partial f_1}{\partial x}.$$

② f (a tedy též f_1, f_2) jsou nekonečně diferencovatelné (viz Důsledek za Větou 23.7.) Také f_{-1} je konformní.

③ obě složky f_1, f_2 jsou harmonické (tj. $\Delta f_1 = 0$, $\Delta f_2 = 0$). To plyne snadno z C.R. podmínek a záměnnosti parciálních derivací.
④ pro jakobián platí:

$$Jf = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \Big(\frac{\partial f_1}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x}\Big)^2 = |f'(z)|^2$$

⑤ f zachovává úhly (Věta 23.3)

Věta 28.12. Nechť Ω, $G \subset \mathbb{R}^2$ jsou oblasti. Nechť $f : \Omega \to G$ je konformní zobrazení a nechť pro funkce $u(x, y) : \Omega \to \mathbb{R}$, $v(\xi, \eta) : G \to \mathbb{R}$ platí, že $u = v \circ f$. Potom:

1. [4] Je-li $v \in C^1(G)$, je $u \in C^1(\Omega)$ a označíme-li

$$E_u = -\big(\partial_x u + i\partial_y u\big), \qquad E_v = -\big(\partial_\xi v + i\partial_\eta v\big),$$

platí

$$E_u = \big(E_v \circ f\big) \cdot \overline{f'}.$$

2. Je-li $v \in C^2(G)$, je $u \in C^2(\Omega)$ a platí

$$\Delta u = \big(\Delta v \circ f\big) \cdot |f'|^2.$$

3. Pokud $v \in L^1_{loc}(G)$ a $-\Delta v = \delta_a$ v $\mathcal{D}'(G)$, pak $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ a $-\Delta u = \delta_{f_{-1}(a)}$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$.

....

(NEODPŘEDNESENO)

Příklady. ① Úloha

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \delta_{(0,a)} \qquad \text{v } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

kde $\Omega = \{(x, y);\ y > 0\}$. *Řešení:* Víme, že $U = -\frac{1}{4\pi}\ln(x^2 + y^2)$ řeší rovnici s Diracem v počátku. Tedy klademe

$$u = -\frac{1}{4\pi}\big\{\ln(x^2 + (y-a)^2) - \ln(x^2 + (y+a)^2)\big\}$$

– řeší rovnici s Diracem v $(0, a)$ a $(0, -a)$; tedy $u = 0$ pro $y = 0$ díky symetrii.
② Úloha

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \delta_{(0,0)} \qquad \text{v } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

[4] Tuto část věty jsme nedokazovali.

kde $\Omega = \{(x,y);\ |y| < b\}$. *Řešení:* Funkce $f(z) = i\exp(\pi z/2b)$ zobrazuje Ω konformně na $G = \{(\xi,\eta);\ \eta > 0\}$; navíc $f(0) = i$. Pomocí Věty 28.12, část 3 je řešením $v \circ f$, kde v řeší Příklad 1 ($a = 1$). Zapsáno podrobně:

$$v(\xi,\eta) = -\frac{1}{4\pi}\big\{\ln(\xi^2 + (\eta-1)^2) - \ln(\xi^2 + (\eta+1)^2)\big\},$$

složeno s funkcí f jakožto zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$:

$$\xi = -\exp\left(\frac{\pi x}{2b}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2b}\right)$$
$$\eta = \exp\left(\frac{\pi x}{2b}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right)$$

③ Úloha

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{v } \Omega,\\ u &= g && \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

kde $\Omega = \{(x,y);\ y > 0\}$. *Řešení:* Najdeme nejprve fundamentální řešení, tj. funkcí U splňující

$$\begin{aligned} -\Delta U &= 0 \qquad \text{v } \Omega,\\ U(x,0+) &= \delta_0(x). \end{aligned}$$

Lze spočítat, že $U(x,y) = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}$. Tedy řešení s obecnou okrajovou podmínkou má tvar

$$u = U *_x g = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{yg(s)}{(x-s)^2 + y^2} ds.$$

④ Úloha

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{v } \Omega,\\ u &= h && \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

kde $\Omega = \{(x,y);\ x^2 + y^2 > 1\}$, a $h = 1$ pro $y > 0$, $h = -1$ pro $y < 0$. *Řešení:* Převedeme opět na předchozí případ – konformní zobrazení $f(z) = i\frac{z-1}{z+1}$ zobrazuje Ω na horní polorovinu $G = \{(\xi,\eta);\ \eta > 0\}$. Okrajová podmínka h na hranici Ω se přenese na funkci $g = -\operatorname{sgn}\xi$ na hranici G. Tedy v má tvar (viz Příklad 3)

$$v = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{sgn}(s)\eta}{(\xi-s)^2 + \eta^2} ds = \dots = -\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\xi}{\eta}$$

Řešení původní úlohy u získáme složením s funkcí f, jíž takto píšeme jako

$$\xi = \frac{(x-1)\ y - (x+1)\ y}{y^2 + (x+1)^2}$$
$$\eta = \frac{y^2 + (x-1)\ (x+1)}{y^2 + (x+1)^2}$$