29. Diferenciální formy.

Definice. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ dimenze n. Vnější součin se řídí následujícími pravidly (u, v, $w \in V$, $a \in \mathbb{R}$):

(0)
$$(av) \wedge v = u \wedge (av) = a(u \wedge v)$$

(i) distributivní zákon:
$$u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$$
$$(u + v) \wedge w = u \wedge w + v \wedge w$$

(ii) asociativní zákon:
$$(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$$

(iii) antikomutativita:
$$u \wedge v = -(v \wedge u)$$

Pozorování. Je $u \wedge u = 0$ pro $\forall u \in V$. Obecněji platí:
$$u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_k = 0\,,$$
právě když vektory $u_1, \ldots, u_k$ jsou lineárně závislé.

Definice. Pro $k \leq n$ definujeme
$$\Lambda^k(V) = \mathrm{Lin}\big\{v_1 \wedge \cdots \wedge v_k;\ v_k \in V\big\}\,.$$

Prvky $\Lambda^k(V)$ se nazývají k-vektory. Zjevně $\Lambda^1(V) = V$. Klademe $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$.
Tzv. Grassmanova algebra nad V je
$$\mathrm{Lin}\Big(\bigcup_{k=0}^{n} \Lambda^k(V)\Big)\,.$$

Poznámky.
• Nemá smysl definovat $\Lambda^k(V)$ pro $k > n = \dim(V)$, neboť dle předchozího pozorování jsou všechny k-vektory pro $k > n$ nulové.
• $\Lambda^k(V)$ je vektorový prostor – prvky lze sčítat, odčítat, násobit skalárem
• $\Lambda^*(V)$ je algebra – vektorový prostor, jehož prvky lze navíc násobit.

Jiná definice. Nechť $e_1, \dots, e_n$ je báze V. Množina multiindexů stupně k, $k \le n$ je

$$I(k,n) = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k);\ 1 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k \le n\}\,.$$

Pro $\alpha \in I(k,n)$ značíme

$$e_\alpha := e_{\alpha_1} \wedge e_{\alpha_2} \wedge \dots \wedge e_{\alpha_k}\,.$$

Potom

$$\big\{e_\alpha;\ \alpha \in I(k,n)\big\}$$

je báze $\Lambda^k(V)$. Speciálně $\dim \Lambda^k(V)$ rovná se počet prvků $I(k,n)$, tj. $\binom{n}{k}$.

Příklad. $u = (1,0,2,3)$, $v = (-1,0,0,1) \in \mathbb{R}^4$. Nechť e_i je kanonická báze. Potom

$$u \wedge v = (e_1 + 2e_3 + 3e_4) \wedge (-e_1 + e_4) = 4e_{14} + 2e_{13} + 2e_{34}\,.$$

Báze $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ je zde $\{e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}\}$.

Lemma 29.1. Nechť $\{v_j\}_{j=1}^k$ a $\{u_j\}_{j=1}^k$ splňují $v_j = \sum_{l=1}^k a_{lj} u_l$, kde $A = \{a_{ij}\}$ je matice $k \times k$. Potom

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k = (\det A)\ u_1 \wedge \dots \wedge u_k\,.$$

Poznámka. Platí dokonce: nechť $\{v_j\}_{j=1}^k$ jsou LN, $\{u_j\}_{j=1}^k$ jsou LN. Potom

$$\mathrm{Lin}\{v_1, \dots, v_k\} = \mathrm{Lin}\{u_1, \dots, u_k\}$$

právě když existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \ne 0$ takové, že

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \lambda\ u_1 \wedge \dots \wedge u_k\,.$$

Definice. V dalším se vyskytuje vektorový prostor

$$T^*(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Lin}\{dx_1, \dots, dx_n\}\,.$$

Vektory dx_1, dx_2 (někdy píšeme dx, dy, nebo dt, du) se odvozují od jmen proměnných daného prostoru; mají význam diferenciálu.

Definice. Nechť $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Diferenciální formou řádu k v $\mathcal{O}$ rozumíme C^∞ zobrazení $\omega : \mathcal{O} \mapsto \Lambda^k(T^*(\mathbb{R}^n))$. Tj. (formální součet)

$$\omega = \sum_{\alpha \in I(k,n)} \omega_\alpha dx_\alpha\,, \tag{1}$$

kde $\omega_\alpha : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ jsou C^∞ funkce, a $dx_\alpha = dx_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha_k}$ jsou k-vektory. $E^k(\mathcal{O})$ značí množinu všech forem řádu k v $\mathcal{O}$.

Příklady. ① $\omega = z\,\mathrm{e}^{x-y}\,dx \wedge dy \in E^2(\mathbb{R}^3)$
② $\omega = (x_1 - x_2)dx_{123} - x_1 \sin x_3 dx_{145} \in E^3(\mathbb{R}^5)$

Poznámky.
• $E^0(\Omega)$ ztotožňujeme se skalárními funkcemi z $\mathcal{O}$ do $\mathbb{R}$.
• $\omega \in E^1(\mathbb{R}^n)$ má obecný tvar $\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j dx_j$, tj. lze ji považovat za funkci z $\mathcal{O}$ do $\mathbb{R}^n$ se složkami $\omega_1, \ldots \omega_n$.
• obecná $\omega \in E^k(\mathbb{R}^n)$ má $\binom{n}{k}$ složek ω_α, $\alpha \in I(k,n)$.

Definice. Vnější diferenciál d formy $\omega \in E^k(\mathcal{O})$ definujeme takto:
1. pro $\omega \in E^0(\mathcal{O})$, tj. skalární funkci, klademe

$$d\omega = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_j} dx_j \,.$$

2. pro $\omega \in E^k(\mathcal{O})$ obecnou, tj. ve tvaru (1) výše, klademe

$$d\omega = \sum_{\alpha \in I(k,n)} \big(d\omega_\alpha\big) \wedge dx_\alpha = \sum_{\alpha \in I(k,n)} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_\alpha \,.$$

Příklady. ① $\omega = z\,\mathrm{e}^{x-y}\,dx \wedge dy \in E^(\mathbb{R}^3)$, $d\omega = \mathrm{e}^{x-y}\,dx \wedge dy \wedge dz$
② $\omega = (x_1 - x_2)dx_{123} - x_1 \sin x_3 dx_{145}$, $d\omega = x_1 \cos x_3 dx_{1345}$
③ $\omega = F_1 dx + F_2 dy$, (F_i jsou funkce proměnných x, y), $d\omega = \big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\big) dx \wedge dy$,

Poznámky.
• operace d zvyšuje řád formy o 1
• operace d je lineární, tj. $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$
• znamená dx_1 a) jeden z prvků $T^*(\mathbb{R}^n)$, nebo b) diferenciál aplikovaný na skalární funkci x_1? Vyjde to nastejno, neboť dle b) je

$$d(x_1) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_1}{\partial x_j} dx_j = dx_1 \,.$$

Věta 29.1. Pro libovolnou formu η je $d(d\eta) = 0$.

Definice. Forma $\omega \in E^k(\mathcal{O})$ se nazve:
1. uzavřená, jestliže $d\omega = 0$;
2. exaktní, jestliže existuje $\eta \in E^{k-1}(\mathcal{O})$ taková, že $d\eta = \omega$.

Poznámky.
• dle věty 29.1. exaktní $\Longrightarrow$ uzavřená
• opačná implikace platí jen v některých $\mathcal{O}$ (např. pro konvexní, jednoduchá souvislost obecně nestačí)
• situace je zobecněním problému "existence potenciálu" vs. "nulovost rotace"

Věta 29.2. [Gradované Leibnizovo pravidlo.] Nechť $\omega \in E^k(\mathcal{O})$, $\eta \in E^l(\mathcal{O})$. Potom

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta\,.$$

Definice. Nechť $\omega \in E^l(\mathcal{O})$, kde $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, tj. ω má tvar

$$\sum_{\alpha \in I(l,n)} \omega_\alpha dx_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha_l}\,.$$

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená, $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je C^∞ zobrazení, $\Phi(\Omega) \subset \mathcal{O}$.
Potom definujeme formu $\Phi^*(\omega) \in E^l(\Omega)$ předpisem

$$\Phi^*(\omega) = \sum_{\alpha \in I(l,n)} (\omega_\alpha \circ \Phi) \wedge d\Phi_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi_{\alpha_l}\,.$$

Operace Φ^* se nazývá přenesení ("pullback").

Příklady. ① $\omega = f(x,y)dx \wedge dy$, $\Phi : (r,u) \mapsto (r\cos u, r\sin u)$ ... potom $\Phi^*(\omega) = f(r\cos u, r\sin u)\, r\, dr \wedge du$
② $\omega = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ... $\phi^*(\omega) = (\boldsymbol{F} \circ \phi) \cdot \phi'$, kde $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$

Věta 29.3. [Vlastnosti přenášení.] Nechť ω, $\eta \in E^*(\mathcal{O})$, a $\Phi : \Omega \to \mathcal{O}$, $\Psi : M \to \Omega$, kde $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, $M \subset \mathbb{R}^s$. Potom

1. $\Phi^*(\omega + \eta) = \Phi^*(\omega) + \Phi^*(\eta)$
2. $\Phi^*(\omega \wedge \eta) = \Phi^*(\omega) \wedge \Phi^*(\eta)$
3. $\Psi^*(\Phi^*(\omega)) = (\Phi \circ \Psi)^*(\omega)$
4. $\Phi^*(d\omega) = d\Phi^*(\omega)$

Poznámka. Body 1 a 2 předchozí věty: přenášení je homomorfismus algeber (tj. zobrazení, které respektuje operace + a $\wedge$). Dle 4 respektuje též operaci d.

Lemma 29.2. Nechť $\omega \in E^k(\mathcal{O})$, kde $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^k$, tj. ω má tvar

$$\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k\,.$$

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená, $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^k$ je hladké zobrazení, $\phi(\Omega) \subset \mathcal{O}$. Potom

$$\phi^*(\omega) = (f \circ \phi) J\phi \, du_1 \wedge \cdots \wedge du_k \, .$$

(Proměnné v Ω značíme $u_1, \ldots, u_k$.)

Definice. $S \subset \mathbb{R}^n$ se nazve k-plocha (připouštíme $1 \le k \le n$), pokud $S = \phi(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ je oblast (tj. je otevřená, souvislá), a $\phi : \Omega \to S$ splňuje
(i) ϕ je C^1, prosté
(ii) $\phi_{-1} : S \to \Omega$ je spojité
(iii) $h(\nabla\phi) = k$ všude v Ω
Dvojice (ϕ, Ω) se nazývá parametrizace plochy.

Definice. Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je k-plocha. Integrál 1. druhu z funkce $f : S \to \mathbb{R}$ definujeme

$$\int_S f \, dS_k = \int_\Omega (f \circ \phi) \sqrt{\det(\nabla\phi^T \nabla\phi)} du \, .$$

Speciálně k-rozměrnou míru S definujeme

$$\sigma_k(S) = \int_\Omega \sqrt{\det(\nabla\phi^T \nabla\phi)} du \, .$$

Lemma 29.3. Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ je matice se sloupci $v_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \ldots, k$. Nechť $R(v_1, \ldots, v_k)$ je rovnoběžnostěn, určený těmito vektory. Potom

$$\sigma_k\big(R(v_1, \ldots, v_k)\big) = \sqrt{\det(A^T A)} \, .$$

Poznámka. Je-li $\omega \in \Lambda^k$, $\eta \in \Lambda^l$, je $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$. Speciálně, skaláry jsou prvky Λ^0, a mohli bychom psát $2 \wedge \omega = \omega \wedge 2$; místo toho píšeme prostě 2ω.
Leibnizovo pravidlo (Věta 29.2) též platí pro $k = 0$, tj. pro skalární funkci f a libovolnou formu η je

$$d(f\eta) = df \wedge \eta + f \wedge d\eta \, .$$

Orientace. (Předběžná úvaha.) Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je k-plocha, (ϕ, Ω_1), (ψ, Ω_2) její parametrizace. Potom existuje (jednoznačně určený) $\delta : \Omega_2 \to \Omega_1$ diffeomorfismus takový, že $\psi = \phi \circ \delta$. Navíc jakobián $J\delta$ nemění v Ω_2 znaménko.

Definice. Řekneme, že parametrizace (ϕ, Ω_1), (ψ, Ω_2) plochy S vyjadřují stejnou orientaci, pokud $J\delta > 0$. Vyjadřují opačnou, pokud $J\delta < 0$ (všude v Ω_2). – δ je difeomorfismus z předchozí úvahy.

Tím se všechny parametrizace rozdělí na dvě třídy; parametrizace z téže třídy vyjadřují stejnou orientaci. Parametrizace z rozdílných tříd vyjadřují opačnou orientaci.
Plocha je orientovaná, zvolím-li jednu z těchto tříd, kterou prohlásím za kladnou. Její prvky jsou parametrizace "ve shodě" s orientací plochy.

Definice. [Integrál z formy.]

1. Nechť $\omega \in E^k(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^k$. Tj. $\omega = f du_1 \wedge \cdots \wedge du_k$. Potom klademe
$$\int_\Omega \omega := \int_\Omega f \, d\lambda_k \,,$$
integrál vpravo chápeme jako Lebesgueův.

2. Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je k-plocha, $\omega \in E^k(\mathcal{O})$, kde $\mathcal{O} \supset S$ je otevřená množina. Potom definujeme
$$\int_S \omega := \int_\Omega \phi^*(\omega) \,,$$
kde (ϕ, Ω) je libovolná parametrizace ve shodě s orientací S. Integrál vpravo je definován ve smyslu předchozího bodu.

Definice. Nechť $S_i \subset \mathbb{R}^n$ jsou k-plochy s parametrizacemi (ϕ_i, Ω_i), $i = 1, \dots, s$. Řetězcem (neboli zobecněnou k-plochou) rozumíme (formální) sumu
$$c := \sum_{i=1}^{s} n_i \phi_i \,,$$
kde $n_i = \pm 1$. Integrál přes řetězec definujeme
$$\int_c \omega = \sum_{i=1}^{s} n_i \int_{S_i} \omega \,.$$

Poznámka. Řetězec je sjednocení S_i, kde $n_i = \pm 1$ značí, že část S_i bereme s orientací stejnou/opačnou jako je ta, kterou vyjadřuje parametrizace ϕ_i.

Definice. Pro krychli $I = [0,1]^k$ definujeme $I_j \subset \mathbb{R}^{k-1}$ jako průmět I do roviny $\{x_j = 0\}$. Zobrazení $\varphi_{j,\alpha} : I_j \to I$,
$$\varphi_{j,\alpha}(y_1, \dots y_{k-1}) = (y_1, \dots, \alpha, \dots, y_{k-1}) \,, [1]$$

[1] Konstanta α stojí na j-té pozici.

kde $1 \leq j \leq k$, $\alpha = 0, 1$ parametrizují stěny I. Okrajem I rozumíme řetězec

$$\partial I = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{j+\alpha} \varphi_{j,\alpha} \,.$$

Definice. Plocha S se nazve k-dimenzionální singulární krychle, pokud existuje parametrizace (ϕ, Ω) taková, že $\Omega = (0,1)^k$.
Pokud ϕ má vlastnosti parametrizace na nějaké otevřené $\hat{\Omega} \supset [0,1]^k$, definujeme okraj S jako řetězec

$$\partial S = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{j+\alpha} \phi \circ \varphi_{j,\alpha} \,.$$

V tom případě se S nazývá singulární krychle s okrajem. Výše uvedený rozklad dává ∂S orientaci, která je "sladěná" s orientací S, určenou pomocí ϕ.

Věta 29.4.[2] [Obecná Stokesova věta.] Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je k-dimenzionální singulární krychle s okrajem ∂S. Nechť S a ∂S mají sladěné orientace, a $\omega \in E^{k-1}(\mathcal{O})$, kde $\mathcal{O} \supset S$ je otevřená. Potom

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega \,.$$

Poznámka. Jde o velmi obecné tvrzení, které jako speciální případ zahrnuje Gaussovu větu (Věta 19.5, Věta 20.1), Greenovu větu (Věta 19.6) či Stokesovu větu v $\mathbb{R}^3$ (Věta 20.5.)

[2]Bez důkazu.