27. Distribuce

distribuce = zobecněné funkce

funkce: $x \mapsto f(x)$; číslu přiřadí číslo

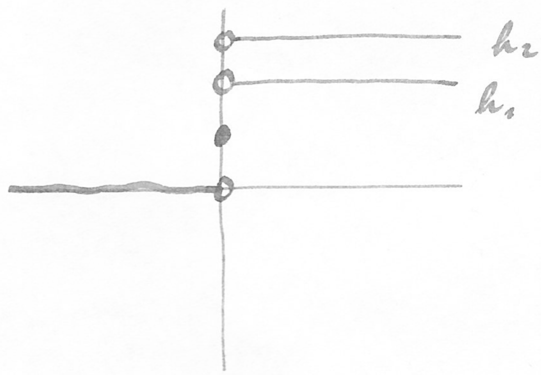
f, g funkce: $f = g$ pokud $f(x) = g(x) \ \forall x$

třídy funkcí C, C^1, L^1 : $f = g \Leftarrow f(x) = g(x)$ pro s.v. x

Dirac $\delta(x)$ $\displaystyle\int_\Omega \delta(x)\,dx = \begin{cases} 1 ; & 0 \in \Omega \\ 0 ; & 0 \notin \Omega \end{cases}$

derivace $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[f(x+h) - f(x)\right]$

mějme $h_1(x) = \begin{cases} 0 ; & x < 0 \\ \frac{1}{2} ; & x = 0 \\ 1 ; & x > 0 \end{cases}$



$h_2(x) = \begin{cases} 0 ; & x < 0 \\ \frac{1}{2} ; & x = 0 \\ 1{,}2 ; & x > 0 \end{cases}$

$h_1' = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$

$h_1' = h_2' \not\Rightarrow h_1 - h_2 \equiv \text{konst.}$, což by ale bylo žádoucí

$\delta(x)$ ... $\displaystyle\int_R f(x+y)\delta(y)\,dy = f(x)$

distribuce je „funkce" $T(x)$ určující číslo ve smyslu

$\varphi \mapsto \int T(x)\varphi(x)\,dx$

Def: Nosič funkce $\text{supp} := \overline{\{x;\ f(x) \neq 0\}}$ // uzávěr; jako support

Def: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ oblast (tj. otevřená, souvislá) v $\mathbb{R}^2$,
prostor testovacích funkcí

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega) = \{f: \Omega \to \mathbb{R};\ C^\infty;\ \text{supp} f = K \subset \Omega;\ K \text{ kompaktní}\}$$

$K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní $\Rightarrow$ K omezená & uzavřená

Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$; $\alpha_j \geq 0$ celé

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad ; \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

Def: [Konvergence v $\mathcal{D}(\Omega)$]
Nechť $\varphi_n, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$
Řekneme, že $\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$, jestliže
(i) $\exists K \subset \Omega$ kompaktní, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že
$\text{supp}\, \varphi_n \subset K$ pro $\forall n \geq n_0$
(ii) $D^\alpha \varphi_n \rightrightarrows 0$ v K pro $\forall \alpha$ multiindex
Řekneme, že $\varphi_n \to \varphi$ v $\mathcal{D}(\Omega)$, jestliže
$\varphi_n - \varphi \to 0$ ve smyslu předchozí definice

Značení: $\|\varphi\|_{C^k(\Omega)} = \sup\limits_{x \in \Omega} \max\limits_{|\alpha| \leq k} \{|D^\alpha \varphi(x)|\}$

norma stejnoměrné konvergence:
$\|\varphi_n\|_{C^k(\Omega)} \to 0 \iff D^\alpha \varphi_n \rightrightarrows 0$ v Ω $\forall |\alpha| \leq k$

Pozn.: $\varphi \in C^\infty(\Omega) \not\Rightarrow \|\varphi\|_{C^k(\Omega)} < \infty$
– problém u hranice: $\frac{1}{x} \in C^\infty((0,\infty))$
avšak $\|\frac{1}{x}\|_{C^0((0,\infty))} = \sup\limits_{x>0} \{\frac{1}{x}\} = \infty$

- $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \|\varphi\|_{C^k(\Omega)} < \infty \quad \forall k$

$K = \text{supp}\, \varphi \dots D^\alpha \varphi(x)$ – 0 mimo K
– omezené v K (spojité na kompaktu)

• $\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \|\varphi_n\|_{C^k(\Omega)} \to 0 \ \forall k$

$\not\Leftarrow$

dokonce: konvergence v $\mathcal{D}(\Omega)$ není vyjádřitelná pomocí žádné normy ani metriky

Def: Distribucí v Ω; kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, rozumíme spojitý lineární funkcionál

$T: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$

$\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$

Tj. požadujeme: (i) $\langle T, a\varphi \rangle = a \langle T, \varphi \rangle$

$\langle T, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle T, \varphi_1 \rangle + \langle T, \varphi_2 \rangle$

$\forall a \in \mathbb{R},\ \varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$

(ii) $\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \langle T, \varphi_n \rangle \to 0$

Značení: $\mathcal{D}'(\Omega)$ ... prostor distribucí v Ω

$\langle T, \varphi \rangle$ ... hodnota distribuce T na testovací fci φ

Příkl. ① $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$

$L^1_{loc}(\Omega) = \{ f(x) : \Omega \to \mathbb{R}$ měřitelné; $\int_K |f(x)|\,dx < \infty$ pro $\forall K \subset \Omega$ kompaktní $\}$

Pro $f(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$ definuji $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ předpisem

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$$

„regulární distribuce s hustotou f"

? $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ linearita: jasné (d.cv.)

spojitost:

$\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$; $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ ... kompakt

$$|\langle T_f, \varphi_n \rangle| \le \int_\Omega |f(x)\varphi_n(x)|\,dx = \int_K |f(x)| \underbrace{|\varphi_n(x)|}_{\le \|\varphi_n\|_{C^0(\Omega)}}\,dx$$

$$\le \left(\int_K f(x)\,dx \right) \cdot \|\varphi_n\|_{C^0(\Omega)} \to 0$$

(2) Dirac: $a \in \Omega \dots \delta_a \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle := \varphi(a)$$

(3) Dirac na sféře: $\delta_{S_r} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$

$$\langle \delta_{S_r}, \varphi \rangle := \int_{S_r} \varphi(x)\, dS(x)$$ plošný integrál 1. druhu

$$S_r = \{ x \in \mathbb{R}^n;\ |x| = r \}$$

Pozn.: Lemma 16.2. (o slabé formulaci)

$f(x) \in C((a,b))$ a $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}((a,b))$ $\left(= C_c^\infty((a,b))\right)$

$$\Rightarrow f(x) \equiv 0 \quad \text{v } (a,b)$$

Lemma 16.2.' $f(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$

$\left.\begin{array}{l} f(x) \in L^1_{loc}(\Omega) \\ \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = 0$ s.v. v Ω

Důsledek: ~~vložení~~ vnoření $L^1_{loc}(\Omega)$ „$\subset$" $\mathcal{D}'(\Omega)$ je prosté

tj. $f, g \in L^1_{loc}(\Omega);\ T_f = T_g \Rightarrow f(x) = g(x)$ s.v.

$T_f = T_g$ ve smyslu $\mathcal{D}'(\Omega)$

$\langle T_f, \varphi \rangle = \langle T_g, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\qquad f(x) - g(x) = 0$ s.v. L. 16.2.'

$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega g(x)\varphi(x)\,dx$ tj. $\int_\Omega [f(x) - g(x)]\varphi(x)\,dx = 0 \ \forall \varphi$

Pozn.: Obecněji: každá „rozumná" míra určuje distribuci

$$\langle T_\mu, \varphi \rangle := \int_\Omega \varphi(x)\, d\mu(x)$$

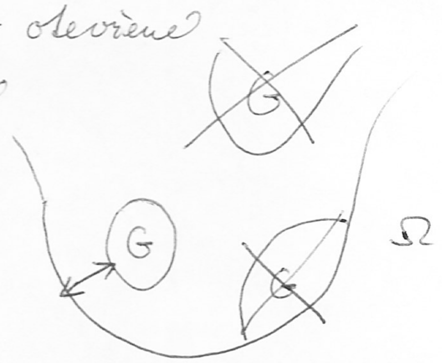
rozumná: – spojité funkce jsou měřitelné
– $\mu(K) < \infty$ pro $\forall K$ kompaktní

Značení: $G \subset\subset \Omega$; Ω, G otevřené

(i) $\overline{G}$ je kompaktní

(ii) $\overline{G} \subset \Omega$

(ostře)



Věta 27.1. [O lokálně konečném řádu distribucí]

Nechť $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, nechť $G \subset\subset \Omega$; Ω, G otevřené

Pak existují čísla $K > 0$ a $m \geq 0$ celé tak, že

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq K \|\varphi\|_{C^m(G)} \text{ pro } \forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$$

DK.: sporem: nechť taková K, m neexistují

tj. $\forall k \in \mathbb{N} \ \exists \varphi_k \in \mathcal{D}(G) : |\langle T, \varphi_k \rangle| > k \|\varphi_k\|_{C^k(G)}$

polož $\psi_k(x) = \dfrac{1}{\sqrt{k}\, \|\varphi_k\|_{C^k(G)}} \cdot \varphi_k(x)$

ověříme: $\psi_k \to 0$ v $\mathcal{D}^*(\Omega)$

$\operatorname{supp} \psi_k = \operatorname{supp} \varphi_k \subset \overline{G}$ ... kompakt $\subset \Omega$

$$D^\alpha \psi_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{D^\alpha \varphi_k(x)}{\|\varphi_k\|_{C^k(G)}}$$ ≤ 1 $\forall x \in G$ (též Ω) pro $k \geq |\alpha|$

(α pevné)

tj. $D^\alpha \psi_k \rightrightarrows 0$ v G

avšak: $|\langle T, \psi_k \rangle| = |\langle T, \frac{\varphi_k}{\sqrt{k}\|\varphi_k\|_{C^k}} \rangle|$

$$= \sqrt{k}\, \underbrace{|\langle T, \frac{\varphi_k}{k \|\varphi_k\|_{C^k(G)}} \rangle|}_{> 1} \to \infty$$

spor se spojitostí T

Def.: Pokud číslo m lze volit nezávisle na $G \subset\subset \Omega$ říkáme, že T je konečného řádu.

Nejmenší číslo $m \geq 0$ (celé) takové, že (*) platí pro $\forall G \subset\subset \Omega$, se nazývá řádem distribuce. (Konstanta K stále může záviset na G)

Příkl. ① $f(x) \in L^1_{loc}(\Omega) \Rightarrow T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je řádu 0

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \le K \|\varphi\|_{C^0(G)} \;; \quad G = \operatorname{supp} \varphi, \quad K = \int_G |f(x)|\,dx$$

② Dirac δ_a je řádu 0

Platí obrácené: $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je řádu 0 $\Rightarrow$
$\Rightarrow T = T_\mu$; kde μ je míra v Ω

③ $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$; $\langle S, \varphi \rangle = \varphi'(0)$ je řádu 1

$$-\frac{d}{dx}\delta_0 = S$$

④ $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \dots \cancel{\sum_{n \in \mathbb{Z}}}$ $\langle T, \varphi \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(n) \dots$ nemá konečný řád

Pozn.: $\mathcal{D}'(\Omega)$ je vektorový prostor

$T \in \mathcal{D}'(\Omega)$; $a \in \mathbb{R}$: $aT \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definujeme

$$\langle aT, \varphi \rangle := a \langle T, \varphi \rangle \; \left(= \langle T, a\varphi \rangle \right)$$

$T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega) \dots T_1 + T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definujeme

$$\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle := \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

D.cv. aT, $T_1 + T_2$ jsou lineární a spojité

Def.: Nechť $T_n, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Řekneme, že T_n konvergují k T ve smyslu distribucí, jestliže $\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$ pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pevné. Značíme $T_n \to T$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$

Pozn. „bodová konvergence" // slabý pojem

Příkl.: ① $\sin nx \to 0$ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

přesněji řečeno $T_{\sin nx} \to 0$

? $\langle T_{\sin nx}, \varphi \rangle \to 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pevné

$$\int_{\mathbb{R}} \sin nx \cdot \varphi(x)\,dx = \int_{-K}^{K} \sin nx\, \varphi(x)\,dx \longrightarrow 0 \;;\; n \to \infty$$

$\operatorname{supp} \varphi \subset [-K, K]$ Riemann-Lebesgueovo lemma

② $\Psi(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, nechť $\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(x)\,dx = 1$, nechť $\Psi(x) = 0$ pro $|x| > K$

$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon^n}\Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \to \delta_0$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$; $\varepsilon \to 0+$

cíl : $\left\langle T_{\frac{1}{\varepsilon^n}\Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}, \varphi \right\rangle \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ pevné

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} \Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi(x)\,dx - \varphi(0) = \left| \begin{array}{l} x = \varepsilon y \\ dx = \varepsilon^n dy \end{array} \right.$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(y)\varphi(\varepsilon y)\,dy - \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(y)\left[\varphi(\varepsilon y) - \varphi(0)\right] dy \to 0$$

$\to 0$: Lebesgue : y pevné : $\varphi(\varepsilon y) \to \varphi(0)$ ↳ spojité

majoranta nezávislá na ε : $|\varphi(x)| \le C$

$|\Psi(y)||\varphi(\varepsilon y) - \varphi(0)| \le |\Psi(y)| \cdot 2C \in L^1(\mathbb{R}^n)$

srovnej : věta o aproximaci Diraca

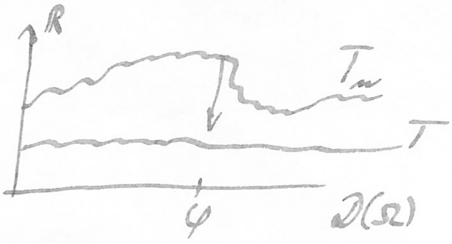
Def : Nechť $T_k, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Řekneme $\sum_{k=1}^{\infty} T_k = T$ ve smyslu distribucí, jestliže $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \langle T_k, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$; $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Řekneme, že zobrazení $\lambda \mapsto T_\lambda$ je spojité,
$\Lambda \to \mathcal{D}'(\Omega)$ // $\mathcal{D}'(\Omega)$ ani $\mathcal{D}(\Omega)$ nejsou metrické prostory
jestliže pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pevné je $\lambda \mapsto \langle T_\lambda, \varphi \rangle$ spojité

Věta 27.2. [Úplnost $\mathcal{D}'(\Omega)$] Nechť $T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$, nechť pro $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ existuje konečná $\lim_{n \to \infty} \langle T_n, \varphi \rangle$

Potom : označíme-li tuto limitu $\langle T, \varphi \rangle$, je $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

DK. : (i) linearita : ✓
(ii) spojitost



Lemma 27.1. $T_\ell \in \mathcal{D}'(\Omega)$, nechť $\langle T_\ell, \varphi \rangle$ je omezená posloupnost pro $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pevné

Nechť $\varphi_\ell \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$

Potom $\langle T_\ell, \varphi_\ell \rangle \to 0$

Dk. (náznak) sporem: $\langle T_\ell, \varphi_\ell \rangle \not\to 0$

$$\exists c > 0 : |\langle T_\ell, \varphi_\ell \rangle| \geq c \quad (\alpha) \quad \text{pro nekonečně } \ell$$

BÚNO: platí pro $\forall \ell$

urychlení konvergence $\varphi_\ell \to 0$:

víme: supp $\varphi_\ell \subset K$ $\forall \ell$; $K \subset\subset \Omega$ kompaktní

$D^\alpha \varphi_\ell \rightrightarrows 0$ v K $\forall \alpha$ pevné

lze vybrat podposloupnost (značenou stejně)

$$|D^\alpha \varphi_\ell(x)| \leq \frac{1}{4^\ell} \quad \forall x \in K$$
$\forall \alpha$ multiindex, $|\alpha| \leq \ell$

$\psi_\ell := 2^\ell \varphi_\ell$: (β) $|\langle T_\ell, \psi_\ell \rangle| \geq 2^\ell \cdot c$

leč: $|D^\alpha \psi_\ell(x)| \leq \frac{1}{2^\ell}$ $\forall \ell$, $\forall |\alpha| \leq \ell$

odtud vyvodím: $\psi_\ell \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$

dokonce $\sum_\ell \psi_\ell$ konv. v $\mathcal{D}(\Omega)$

zvolíme $\{\ell_\nu\} \subset \{\ell\}$ podposloupnost:

$\langle T_{\ell_\nu}, \psi \rangle$ ... neomezené

kde $\psi := \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_{\ell_\nu} \in \mathcal{D}(\Omega)$

ℓ_1 ... volme tak, že $|\langle T_{\ell_1}, \psi_{\ell_1} \rangle| > 2 \Leftarrow (\beta)$

$\ell_1, \dots, \ell_{\nu-1}$ známa: volme ℓ_ν tak velké, aby

$|\langle T_{\ell_j}, \psi_{\ell_\nu} \rangle| \leq \frac{1}{2^{\nu-j}}$; $j = 1, \dots, \nu-1$

$|\langle T_{\ell_\nu}, \psi_{\ell_\nu} \rangle| \geq \sum_{j=1}^{\nu-1} C(\psi_{\ell_j}) + \nu + 1$ kde $C(\psi_{\ell_j}) := \sup_n |\langle T_n, \psi_{\ell_j} \rangle|$

Tvrdíme $|\langle T_{k\nu}, \psi\rangle| > \nu \ \forall \nu$

$$\langle T_{k\nu}, \psi\rangle = \langle T_{k\nu}, \sum_j \psi_{k_j}\rangle$$

$$= \langle T_{k\nu}, \psi_{k\nu}\rangle + \langle T_{k\nu}, \sum_{j<\nu} \psi_{k_j}\rangle + \langle T_{k\nu}, \sum_{j>\nu} \psi_{k_j}$$

$$= (1) + (2) + (3)$$

$$|(1)| > \nu + 1 + \sum_{j=1}^{\nu-1} C(\psi_{k_j})$$

$$|(2)| \leq \sum_{j=1}^{\nu-1} |\langle T_{k\nu}, \psi_{k_j}\rangle| \leq \sum_{j=1}^{\nu-1} C(\psi_{k_j})$$

$$|(3)| \leq \sum_{j>\nu} |\langle T_{k\nu}, \psi_{k_j}\rangle| \leq \sum_{j>\nu} \frac{1}{2^{\nu+j}} = 1$$

$$|(1)+(2)+(3)| \geq (1) - |(2)| - |(3)| \geq \nu$$

Důkaz V.27.2. $\langle T, \varphi\rangle := \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$\hookrightarrow \exists$ konečná, předpoklad

linearita:

$$\langle T, \varphi_1 + \varphi_2\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi_1 + \varphi_2\rangle$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\langle T_n, \varphi_1\rangle + \langle T_n, \varphi_2\rangle\right)$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi_1\rangle}_{\langle T, \varphi_1\rangle} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi_2\rangle}_{\langle T, \varphi_2\rangle}$$

$\langle T, a\varphi\rangle = a\langle T, \varphi\rangle$ analogicky

(ii) T spojité: ?? $\exists \varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$; $\varphi_k \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$

leč $|\langle T, \varphi_k\rangle| \not\to 0$

$\exists a > 0: |\langle T, \varphi_k\rangle| \geq 2a \ \forall k$

leč: $\langle T, \varphi_k\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi_k\rangle$; k pevné

$\forall k \ \exists n_k; |\langle \underbrace{T_{n_k}}_{S_k}, \varphi_k\rangle| > a$

$\langle S_k, \varphi\rangle$ omezená (má limitu) $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pevné

L. 27.1. $\langle S_k, \varphi_k\rangle \to 0$

spor

Příkl.: $T : \varphi \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(n)$

$T = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$ ... řada konverguje v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$\exists \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{n} \delta_n, \varphi \right\rangle$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pevné

vlastní

věta 27.2. $\Rightarrow T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Distribuce $T : \varphi \mapsto \langle T, \varphi\rangle = \cancel{\int_\Omega T(x)\varphi(x)\,dx}$

$\mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$

lineární spojité

$T = T(x)$

└ formální název proměnné v Ω

$\langle T, \varphi\rangle = \langle T(x), \varphi(x)\rangle = \langle T(x), \varphi(x)\rangle_x$

cíl: záměna proměnné v distribuci

$T(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ... ? $T(Ay+b) \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární matice

$b \in \mathbb{R}^n$

heuristická úvaha: $f(x) \in L^1_{loc}(\Omega) \dots f(Ay+b) \in L^1_{loc}(\tilde{\Omega})$

$\tilde{\Omega} = \{Ay+b ;\ y \in \Omega\}$

chci $T_{f(\cdot)}(Ay+b) = T_{f(A\cdot+b)}(y)$

$\langle T_{f(A\cdot+b)}(y), \varphi(y)\rangle_y = \int_{\tilde{\Omega}} f(Ay+b)\varphi(y)\,dy$ | $Ay+b = x \in \Omega$, $|\det A|\,dy = dx$, $y = A^{-1}(x-b)$

$= \int_\Omega \frac{f(x)\varphi(A^{-1}(x-b))}{|\det A|}\,dx = \left\langle T_{f(\cdot)}(x), \frac{1}{|\det A|}\varphi(A^{-1}(x-b))\right\rangle_x$; $\varphi \in \mathcal{D}(\tilde{\Omega})$

Definice: Nechť $T(x) \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je regulární, $b \in \mathbb{R}^n$. Distribuci $T(Ay+b) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definujeme předpisem

$$\langle T(Ay+b), \varphi(y) \rangle_y := \left\langle T(x), \frac{\varphi(A^{-1}(x-b))}{|\det A|} \right\rangle_x$$

pro $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, kde $\Omega = \{Ay+b \,;\, y \in \tilde{\Omega}\}$

Pozn. ověření, že $T(Ay+b) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ... za chvíli

Příkl. ① $\delta_0(y+b) =$

$A = I$ identita ... $\langle \delta_0(y+b), \varphi(y) \rangle$

$$= \left\langle \delta_0(x), \frac{\varphi(x-b)}{1} \right\rangle_x = \varphi(x-b)\Big|_{x=0}$$

$$= \varphi(-b) = \langle \delta_{-b}, \varphi \rangle$$

$f(x) \to f(x+b)$ posun grafu vlevo

② $\delta_0(ay) = \frac{1}{a^n}\delta_0(y)$ $\quad a>0;\ A = aI;\ b = 0$

$$\langle \delta_0(ay), \varphi(y) \rangle_y = \left\langle \delta_0(x), \frac{\varphi(a^{-1}x)}{a^n} \right\rangle_x = \frac{1}{a^n}\varphi(0)$$

$$= \left\langle \frac{1}{a^n}\delta_0(x), \varphi(x) \right\rangle_x$$

③ $\frac{1}{\varepsilon^n}\delta_0\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) = \delta_0(y) \quad \forall \varepsilon > 0$

Lemma 27.2. [O spojitosti duálního zobrazení]
Nechť $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené, nechť $\Phi: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\tilde{\Omega})$ je spojité, lineární zobrazení. Definujme duální zobrazení $\Phi': \mathcal{D}'(\tilde{\Omega}) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ předpisem

$$\langle \Phi'(T), \varphi \rangle := \langle T, \Phi(\varphi) \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Potom Φ' je spojité lineární zobrazení, speciálně $\Phi'(T) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ pro $\forall T \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$

Dk. 1. $\Phi'(T) \in \mathcal{D}'(\Omega)$; $T \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$ pevné

linearita: $\langle \Phi'(T), \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle T, \Phi(\varphi_1 + \varphi_2) \rangle$

$$= \langle T, \Phi(\varphi_1) + \Phi(\varphi_2) \rangle$$
$$= \langle T, \Phi(\varphi_1) \rangle + \langle T, \Phi(\varphi_2) \rangle$$
$$= \langle \Phi'(T), \varphi_1 \rangle + \langle \Phi'(T), \varphi_2 \rangle$$

podobně: $\langle \Phi'(T), a\varphi \rangle = a \langle \Phi'(T), \varphi \rangle$

spojitost: $\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega) \overset{?}{\Rightarrow} \langle \Phi'(T), \varphi_n \rangle \to 0$

$$\langle \Phi'(T), \varphi_n \rangle = \langle T, \underbrace{\Phi(\varphi_n)}_{\to 0 \text{ v } \mathcal{D}(\tilde{\Omega})} \rangle \to 0$$

2. $\Phi'(T_1 + T_2) = \Phi'(T_1) + \Phi'(T_2)$

$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ libovolné: $\langle \Phi'(T_1 + T_2), \varphi \rangle = \langle T_1 + T_2, \Phi(\varphi) \rangle$

$$= \langle T_1, \Phi(\varphi) \rangle + \langle T_2, \Phi(\varphi) \rangle = \langle \Phi'(T_1), \varphi \rangle + \langle \Phi'(T_2), \varphi \rangle$$

3. $T \to \Phi'(T)$ spojité, tj.:

$T_n \to 0$ v $\mathcal{D}'(\tilde{\Omega}) \overset{?}{\Rightarrow} \Phi'(T_n) \to 0$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$

$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pevné: $\langle \Phi'(T_n), \varphi \rangle = \langle T_n, \underbrace{\Phi(\varphi)}_{\in \mathcal{D}(\tilde{\Omega})} \rangle \to 0$

Důsl. $T(Ay + b) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ pro $\forall\, T \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$ ... viz předchozí definice

dokonce $T(x) \mapsto T(Ay + b)$ je spojité, lineární

$\mathcal{D}'(\tilde{\Omega}) \to \mathcal{D}'(\Omega)$

dk. aplikuj L.27.2. na $\Phi: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\tilde{\Omega})$

$$\varphi(y) \mapsto \frac{\varphi(A^{-1}(x-b))}{|\det A|}$$

Φ je lineární a spojité

Def.: $T(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ se nazve

1. sudá, je-li $T(-x) = T(x)$
2. lichá, je-li $T(-x) = -T(x)$
3. radiální, je-li $T(Qx) = T(x)$ ~~kde~~ $\forall Q$ otočení kolem 0

Opakování: Gaussova věta

$M \subset \mathbb{R}^n$ rozumná

$$F(x) \in C^1(\bar{M}) \qquad \int_M \frac{\partial F}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial M} F \nu_i \, dS$$

Důsl. „per-partes" v $\mathbb{R}^n$: $f, g \in C^1(\bar{M})$

$$\int_M f \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial M} f g \nu_i \, dS - \int_M \frac{\partial f}{\partial x_i} g \, dx$$

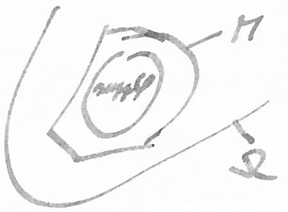
$$\left(\text{volme } F = fg \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i} = f \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} g \right)$$

Lemma 27.3. Nechť $f(x) \in C^m(\Omega)$, $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$

Potom $$\int_\Omega (D^\alpha f)\varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f D^\alpha \varphi \, dx$$

pro $\forall \alpha$ multiindex, $|\alpha| \le m$

dk



$\operatorname{supp} \varphi \subset\subset M$

⋮

omezená
rozumná

$$\int_\Omega (D^\alpha f)\varphi \, dx = \int_M (D^\alpha f)\varphi \, dx = \int_M \frac{\partial}{\partial x_1}(D^{\hat{\alpha}} f)\varphi \, dx$$ per-partes, $\varphi = 0$ na ∂M

~~kde~~ $\alpha = \hat{\alpha} + (1,0,0\dots)$

$$= -\int_M D^{\hat{\alpha}} f \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\, dx = \dots = (-1)^{|\alpha|} \int_M f D^\alpha \varphi \, dx$$

$|\alpha|$ krát per partes

$D^\beta \varphi = 0$ na ∂M pro $\forall \beta$

L 27.3: $\langle T_{D^\alpha f}, \varphi \rangle = \langle T, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi \rangle$

Def.: Nechť $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, α libovolný multiindex
Potom definuji $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ předpisem
$\varphi \mapsto \langle T, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi \rangle$

Věta 27.3. Pro $\forall \alpha$ multiindex je $T \mapsto D^\alpha T$ spojité lineární zobrazení z $\mathcal{D}'(\Omega)$ do $\mathcal{D}'(\Omega)$: speciálně $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Dk.: až později

Přík. ① $\frac{d}{dx} T_h = \delta_0$

$h(x) = \begin{cases} 1 ; & x > 0 \\ 0 ; & x < 0 \end{cases}$
$\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

$$\left\langle \frac{d}{dx} T_h, \varphi \right\rangle = \left\langle T_h, -\frac{d}{dx}\varphi \right\rangle =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(x)(-\varphi'(x))\,dx = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx = -\left[\varphi(x)\right]_0^\infty = \varphi(0) =$$

$$= \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

dk. (V.27.3) $\Phi: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$
$\varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi$ spojité, lineární
$\Rightarrow$ jsem hotov: $T \to D^\alpha T$ je Φ'

lineární: zjevné $\quad\quad \forall \alpha$ zjevné

spojitost: $\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega) \overset{?}{\Rightarrow} D^\alpha \varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$

$\left.\begin{array}{l} 1)\ \operatorname{supp} \varphi_n \subset K\ \forall n,\ K \text{ kompakt} \\ 2)\ D^\beta \varphi_n \rightrightarrows 0 \text{ v } \Omega \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \operatorname{supp} D^\alpha \varphi_n \subset K\ \forall n \\ D^\beta(D^\alpha \varphi_n) = D^{\tilde\beta} \varphi_n \rightrightarrows 0 \end{array}$

Pozn. $\frac{d}{dx}$, D^α ... derivace $\begin{cases} \text{bodová} \\ \text{ve smyslu distribucí} \end{cases}$

Lemma 27.3: $\underbrace{D^\alpha}_{\text{distr.}} T_f = T_{\underbrace{D^\alpha f}_{\text{bodová}}}$; $f \in C^m(\Omega)$; $|\alpha| \leq m$

Přík. ① $h(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}$ Heavisideova fce
$\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

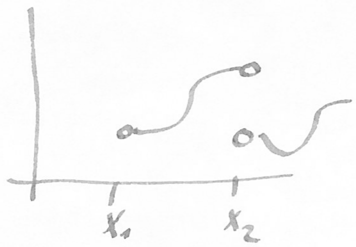
$\frac{d}{dx} T_h = \delta_0$ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Opak. $f(x)$ je po částech C^1 v (a,b)

$\exists\ x_1 < \dots < x_n \in (a,b)$

~~$f(x) \in C^1$~~ f, f' jsou spojité mimo x_j

a mají vlastní jednostranné limity v x_j



viz „Fourierovy řady"

Lemma 27.4. Nechť $f(x)$ je po částech C^1 v (a,b)

Potom

$$\frac{d}{dx} T_f = T_{f'} + \sum_j \left\{ f(x_j+) - f(x_j-) \right\} \delta_{x_j}$$

ve smyslu $\mathcal{D}'(a,b)$, kde f' je bodová derivace f (definovaná jen s.v. v (a,b))

dk. $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$: $\left\langle \frac{d}{dx} T_f, \varphi \right\rangle = \left\langle T_f, -\varphi' \right\rangle = \int_a^b f(x)\left(-\varphi'(x)\right) dx =$

BÚNO $a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\left[-\varphi'(x)\right] dx = \sum_j \Big[-f(x)\varphi(x) \Big]_{x_{j-1}}^{x_j} + \sum_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} f'(x)\varphi(x)\, dx =$$

... per-partes na (x_{j-1}, x_j) : $f, \varphi \in C^1$

$$= \underbrace{\sum_j \Big(-f(x_j-)\varphi(x_j) + f(x_{j-1}+)\varphi(x_{j-1}) \Big)}_{\sum_{j=1}^{n-1} \left(f(x_j+) - f(x_j-) \right) \underbrace{\varphi(x_j)}_{\langle \delta_{x_j}, \varphi \rangle}} + \underbrace{\int_a^b f'(x)\varphi(x)\, dx}_{\langle T_{f'}, \varphi \rangle}$$

Příkl. $\frac{d}{dx} \ln|x| = ?$ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

bodová derivace : $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ s.v. v $\mathbb{R}$

$\frac{d}{dx} T_{\ln|x|}$ $\qquad \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$

$$\left\langle \frac{d}{dx} T_{\ln|x|}, \varphi \right\rangle = \left\langle T_{\ln|x|}, -\varphi' \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\ln|x|}_{\in L^1_{loc}(\mathbb{R})} \left(-\varphi'(x)\right) dx$$

Důk: $= \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int_{I_\varepsilon} \ln|x| \left(-\varphi'(x)\right) dx$; $I_\varepsilon = \mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)$

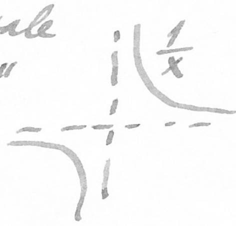
$$\int_{I_\varepsilon} \ln|x|\left(-\varphi'(x)\right) dx = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} = \Big|\ \text{per-partes}$$

$$= \underbrace{\left[-\ln|x|\,\varphi(x)\right]_{-\infty}^{-\varepsilon} + \left[-\ln|x|\,\varphi(x)\right]_{\varepsilon}^{\infty}}_{-\ln|-\varepsilon|\varphi(-\varepsilon)+\ln|\varepsilon|\varphi(\varepsilon)} + \int_{I_\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

$$= \ln\varepsilon\,\underbrace{\left(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)\right)}_{=O(\varepsilon)} \Bigg\} \to 0\ ;\ \varepsilon\to 0+$$

$$\left\langle \frac{d}{dx} T_{\ln|x|}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{I_\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

v.p. : la valeur principale
„hlavní hodnota"



$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \text{v.p.}\ \frac{1}{x}$$

$$\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx$$

Pozn. co nefunguje v $\mathcal{D}'(\Omega)$
nelze definovat $T(x)$ ... hodnota distribuce v bodě
— " — $T\cdot S$ pro $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Def.: Nechť $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, nechť $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ je otevřená. Řekneme, že T je nulová v $\tilde{\Omega}$, jestliže $\langle T, \varphi\rangle = 0$ pro $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \tilde{\Omega}$

Dále definuji

$$O_T = \bigcup \{\tilde{\Omega}\ ;\ T \text{ je nulová v } \tilde{\Omega}\}$$

„nulová množina" T

$$\operatorname{supp} T := \Omega \setminus O_T$$

Přikl.: $\operatorname{supp} \delta_a = \{a\}$; platí obráceně : $\operatorname{supp} T = \{a\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow T = \sum_{j=0}^{N} c_n D^{\alpha_n} \delta_a$$

Opakování: $f(x): (a,b) \to \mathbb{R}$, $f'(x) = 0 \ \forall x$

$\Rightarrow f(x) \equiv c$ v (a,b)

Věta 27.4. Nechť $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ souvislá, nechť

$\frac{\partial}{\partial x_j} T = 0$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$ pro $\forall j = 1, \dots, n$

Pak $\exists c \in \mathbb{R}$ tak, že $T = T_c$

d.: $n = 1$, $\Omega = (a,b)$

TRIK: volme $\psi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\int_a^b \psi = 1$

/ viz kapitola 16

$\varphi(x) \in \mathcal{D}(a,b)$ ... pevná, libovolná

$\eta(x) := \varphi(x) - \left(\int_a^b \varphi(s) ds \right) \psi(x)$

$\omega(x) := \int_a^x \eta(s) \, ds$

tvrdím: $\eta, \omega \in \mathcal{D}(a,b)$

$\omega' = \eta$: zjevné ; $\eta \in \mathcal{D}(a,b)$ zjevné

$\omega \in C^\infty$ zjevné

? $\operatorname{supp} \omega \subset\subset (a,b)$

nechť $\operatorname{supp} \eta \subset [\alpha, \beta] \subset (a,b)$

$x < \alpha$: $\omega(x) = \int_a^x \underbrace{\eta(s)}_{=0} ds = 0$

$x > \beta$: $\omega(x) = \int_a^x \eta(s) \, ds = \int_a^b \eta(s) \, ds \ \boxed{\eta = 0;\ s > x} \ \underset{(\beta)}{\overset{*}{=}} \ \cancel{\int_a^b \varphi(s) ds} -$

$* = \int_a^b \varphi(s) ds - \left(\int_a^b \varphi(s) ds \right) \underbrace{\int_a^b \psi(s) ds}_{=1} = 0$

víme: $\frac{d}{dx} T = 0$ v $\mathcal{D}'(a,b)$

$\underline{0} = \left\langle \frac{d}{dx} T, \omega \right\rangle = \langle T, -\omega' \rangle = \underline{\langle T, -\eta \rangle}$

$\langle T, \varphi \rangle = \left\langle T, \left(\int_a^b \varphi(s) ds \right) \psi \right\rangle = \int_a^b \varphi(s) ds \underbrace{\langle T, \psi \rangle}_{c} = \int_a^b c \, \varphi(s) ds = \langle T_c, \varphi \rangle$

Def. Nechť $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, nechť $\omega \in C^\infty(\Omega)$
Definujeme distribuci $\omega T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ jako
$$\langle \omega T, \varphi \rangle := \langle T, \omega \varphi \rangle \ ; \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Pozn. $\omega \in C^\infty(\Omega)$ pevné : $T \mapsto \omega T$
je spojité, lineární zobrazení
z $\mathcal{D}'(\Omega)$ do $\mathcal{D}'(\Omega)$, speciálně
$\omega T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

dk. $\varphi \mapsto \omega \varphi$ je spojité, lineární
$\mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ + Lemma 27.2.

linearita: zjevné
spojitost: $\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \omega\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$

$\left.\begin{array}{l} \exists K \subset \Omega \text{ kompakt; } \operatorname{supp} \varphi_n \subset K \ \forall n \\ D^\alpha \varphi_n \rightrightarrows 0 \text{ v } \Omega \ \forall \alpha \text{ multiindex} \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{supp}(\omega\varphi_n) \subset K$

$$D^\alpha(\omega\varphi_n) = \sum_{\beta \le \alpha} C_\beta \underbrace{D^{\alpha-\beta}\omega}_{\text{pevné}} \underbrace{D^\beta \varphi_n}_{\rightrightarrows 0}$$

Příkl. ① $x \cdot \delta_0 =$
$$\langle x\delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, x\varphi \rangle = x\varphi\big|_{x=0} = 0$$

② $x \cdot (v.p. \frac{1}{x})$
$$\langle v.p. \tfrac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

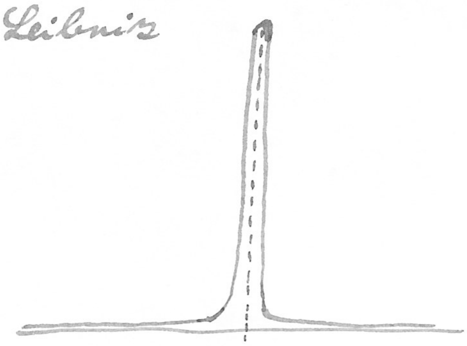
$$\langle x \cdot v.p. \tfrac{1}{x}, \varphi \rangle = \langle v.p. \tfrac{1}{x}, x\varphi \rangle =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon,\varepsilon)} x \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon,\varepsilon)} \varphi(x) dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \langle T_1, \varphi \rangle$$

$$\underbrace{\left(x \cdot \left(v.p. \tfrac{1}{x}\right)\right)}_{1} \cdot \delta_0 = \underset{T_1}{\overset{}{1}} \cdot \delta_0 = \delta_0$$
$$\underbrace{(x \cdot \delta_0)}_{0} \cdot v.p. \tfrac{1}{x} = 0 \cdot v.p. \tfrac{1}{x} = 0$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & ; \ x > 0 \\ 0 & ; \ x < 0 \end{cases} \qquad \text{Heaviside}$$

$$\frac{d}{dx} h = \delta_0$$

$$h \cdot h = h \quad \Big/ \frac{d}{dx} \quad \text{Leibniz}$$



$$\frac{d}{dx} h \cdot h + h \cdot \frac{d}{dx} h = \frac{d}{dx} h$$

$$2 \delta_0 \cdot h = \delta_0$$

$$\delta_0 \cdot h = \frac{1}{2} \delta_0$$

podobně $\quad h \cdot h \cdot h = h \quad \Big/ \frac{d}{dx}$

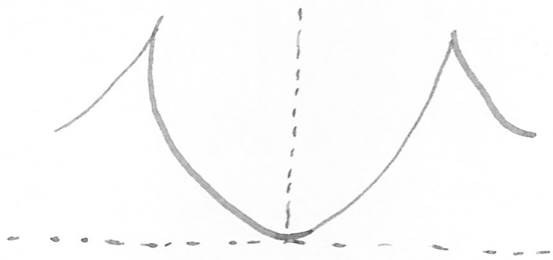
$$\underbrace{(h \cdot h)'}_{2\delta_0 \cdot h} \cdot h + \underbrace{h \cdot h}_{h} \cdot \underbrace{h'}_{\delta_0} = \underbrace{h'}_{\delta_0}$$

$$3 \delta_0 \cdot h = \delta_0$$

$$\delta_0 \cdot h = \frac{1}{3} \delta_0$$

... Schwartzův výsledek o nemožnosti:
není možné mít zároveň Leibnizovo pravidlo,
neohraničenou (neomezenou) derivaci a
bodové násobení funkcí

$$f(x) = x^2 \quad ; \ x \in [-\pi, \pi]$$
a dále 2π-per.



$$F_f(x) = \frac{\pi^3}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{4(-1)^k}{k^2} \cos kx}_{f_k(x)}$$

$f(x)$ ... spojitá, po částech $C^1 \Rightarrow f(x) = F_f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$

tvrdíme: $f(x) = F_f(x)$ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \langle T_{\frac{\pi^3}{3}}, \varphi \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \langle T, \varphi \rangle$$

$$\int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(x)}_{\frac{\pi^3}{3} + \sum_k f_k(x)} \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\pi^3}{3} \varphi(x)\, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x) \varphi(x)\, dx$$

... záměna Σ, $\int$: konvergence je stejnoměrná

($\nwarrow$ Weierstrass, $|f_k| \le \frac{c}{k^2}$)

stačí integrovat přes supp φ ... omezený

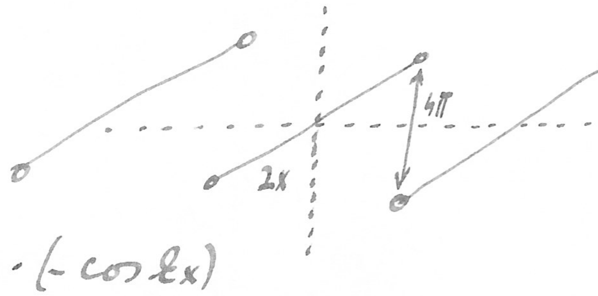
$$f(x) = \frac{\pi^3}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 4}{k^2} \cos kx \qquad \frac{d}{dx} \text{ spojitá operace v } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 4}{k} (-\sin kx)$$

$\shortparallel$

$f'(x)$ ... bodová derivace : $f'(x) = 2x$; $x \in (-\pi, \pi)$

a dále 2π - per.



$$\underbrace{\frac{d}{dx} f'(x)}_{= 2 + \sum_j -4\pi\, \delta_{(2j+1)\pi}} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 4 \cdot \cancel{\sin kx} \cdot (-\cos kx)$$

$$\frac{x^n}{n!} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdots \frac{x^1}{1!} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{x^0}{0!} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{0 \cdot x^{-1}}{\Gamma(1)} =$$

$$= \frac{\cancel{0} \cdot x^{-1}}{\cancel{0} \cdot \Gamma(0)} \qquad \lambda \to x^{\lambda} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \text{ pro } \operatorname{Re} \lambda > -1$$

Def. Nechť $\sigma \subset \mathbb{C}$ je oblast.

Parametrickým souborem distribucí (p.s.d.) rozumíme zobrazení $\lambda \mapsto T_\lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Řekneme, že p.s.d. T_λ závisí holomorfně na $\lambda \in \sigma$, jestliže pro $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pevné je funkce $\lambda \to \langle T_\lambda, \varphi \rangle$ holomorfní v σ $\qquad \sigma \to \mathbb{C}$

Řekneme, že p.s.d. T_λ má v bodě $\lambda_0 \in \sigma$ izolovanou singularitu, jestliže pro $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pevné má funkce $\lambda \mapsto \langle T_\lambda, \varphi \rangle$ tuto vlastnost.

Řekneme, že $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je reziduum p.s.d. T_λ v bodě $\lambda_0 \in \sigma$, značíme $\operatorname{res}_{\lambda_0} T_\lambda = T$, jestliže $\operatorname{res}_{\lambda_0} \langle T_\lambda, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pevné

Příkl.: $x_+^\lambda := \begin{cases} x^\lambda & ; x > 0 \\ 0 & ; x \le 0 \end{cases}$

$|x_+^\lambda| = \begin{cases} 0 & ; x \le 0 \\ x^{Re\,\lambda} & ; x > 0 \end{cases}$

pozoruji: $Re\,\lambda > -1$: $x_+^\lambda \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

Příslušné regulární distribuce značme též x_+^λ (místo $T_{x_+^\lambda}$)

Pozn. ① $x_+^\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ závisí holomorfně na $\lambda \in \sigma$; $\sigma = \{Re\,\lambda > -1\}$

dk. $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pevné

$\lambda \mapsto \langle x_+^\lambda, \varphi \rangle = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx$ je holomorfní

$\frac{d}{dx} \cdots \int_0^\infty \ln x \cdot x^\lambda \varphi(x)\,dx$

② $x_+^0 = h(x)$ ... Heavisideova funkce

③ $Re\,\lambda > 1 \Rightarrow x_+^\lambda \in C^1(\mathbb{R})$ a platí $\frac{d}{dx} x_+^\lambda = \lambda \cdot x_+^{\lambda-1}$

bodově a též díky L.27.4. v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

④ $x \cdot x_+^\lambda = x_+^{\lambda+1}$

$\in C^\infty(\mathbb{R})$

Pozn.: T_λ p.s.d.; $T_\lambda \in \mathcal{H}(\sigma)$, potom

① $D^\alpha T_\lambda \in \mathcal{H}(\sigma)$ pro $\forall \alpha$ multiindex

? $\lambda \mapsto \langle D^\alpha T_\lambda, \varphi \rangle$ je $\in \mathcal{H}(\sigma)$

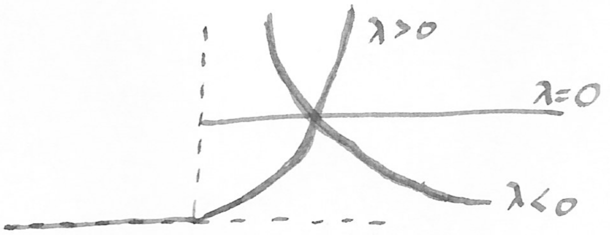
$\quad = \langle T_\lambda, \underbrace{(-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi}_{\psi \in \mathcal{D}(\Omega)} \rangle$

② $\omega \in C^\infty(\Omega)$; $T_\lambda \in \mathcal{H}(\sigma)$

$\omega T_\lambda \in \mathcal{H}(\sigma)$

③ !! Věta o jednoznačnosti: T_λ, S_λ p.s.d., $\in \mathcal{H}(\sigma)$, σ souvislá, nechť $N = \{\lambda \in \sigma, T_\lambda = S_\lambda\}$ má hromadný bod v σ $\Rightarrow T_\lambda = S_\lambda$ pro $\forall \lambda \in \sigma$

$x_+^\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$
$\mathrm{Re}\,\lambda > -1$



$\left.\right\}$ pro $\lambda \in \mathbb{R}$ jinak $\lambda \in \mathbb{C}$

$\lambda \mapsto x_+^\lambda$ závisí
$\mathbb{C} \to \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ holomorfně na $\lambda \in \{\mathrm{Re}\,\lambda > -1\}$

tj. $\lambda \mapsto \langle x_+^\lambda, \varphi\rangle$ je holomorfní $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$
$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Pozn. povolujeme komplexní distribuce
$T: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$

formálně: $T = T_1 + i\,T_2$

$$\langle x_+^\lambda, \varphi\rangle = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx = \int_0^\infty x^{\mathrm{Re}\,\lambda} \cos(\mathrm{Im}\,\lambda \ln x)\,dx + i\int_0^\infty x^{\mathrm{Re}\,\lambda} \sin(\mathrm{Im}\,\lambda \ln x)\,dx$$

$$x^\lambda = \exp(\lambda \ln x) = \exp(\mathrm{Re}\,\lambda \cdot \ln x + i\,\mathrm{Im}\,\lambda \cdot \ln x)$$
$$= x^{\mathrm{Re}\,\lambda} \cdot (\cos(\mathrm{Im}\,\lambda \ln x) + i \sin(\mathrm{Im}\,\lambda \ln x))$$

dále platí:
$$\frac{d}{dx} x_+^\lambda = \lambda\, x_+^{\lambda-1}\ ; \quad \mathrm{Re}\,\lambda > 1$$
$$x \cdot x_+^\lambda = x_+^{\lambda+1}\ ; \quad \mathrm{Re}\,\lambda > -1$$

Věta 27.5. Parametrický systém distribucí (p.s.d.) x_+^λ lze holomorfně rozšířit na množinu $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$. Toto rozšíření (značíme stejně) má následující vlastnosti:

1. $$\mathrm{res}_{\lambda=-\ell}\, x_+^\lambda = \frac{(-1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell-1}\delta_0$$

2. $$\frac{d}{dx} x_+^\lambda = \lambda\, x_+^{\lambda-1}\ ; \quad -\lambda \notin \mathbb{N}$$

3. $$x \cdot x_+^\lambda = x_+^{\lambda+1}\ ; \quad -\lambda \notin \mathbb{N}$$

dk. podobná idea jako V.26.2. (rozšíření Γ funkce)

$\mathrm{Re}\,\lambda > -1$: $$\frac{d}{dx} x_+^{\lambda+1} = (\lambda+1)\, x_+^\lambda$$

$$x_+^\lambda = \underbrace{\frac{1}{\lambda+1}}_{\mathcal{H}\{\lambda \neq -1\}} \frac{d}{dx} \underbrace{x_+^{\lambda+1}}_{\in \mathcal{H}\{\mathrm{Re}\,\lambda > -2\}}$$

tedy

PS $\in \mathcal{H}\{\operatorname{Re}\lambda > -2 \,;\, \lambda \neq -1\}$

$\therefore$ rozšíření x_+^λ pro tyto hodnoty λ

obecněji: $$x_+^\lambda = \frac{1}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+\ell)}\left(\frac{d}{dx}\right)^\ell x_+^{\lambda+\ell} \quad ; \operatorname{Re}\lambda > -1$$

leč: PS $\in \mathcal{H}\{\operatorname{Re}\lambda > -\ell-1 \,;\, \lambda \neq -1, \dots, -\ell\}$

$\therefore$ definuji rozšíření pro tyto λ

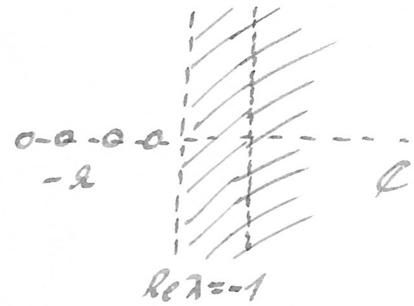
pozorování: je to rozšíření

vzorce pro různá ℓ nejsou navzájem ve sporu

$\Rightarrow$ to plyne z: věta o jednoznačnosti + holomorfnost

$\lambda,3$: platí pro $\operatorname{Re}\lambda > -1$

$\Rightarrow$ platí pro $\forall\, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$



$\ell \in \mathbb{N}$ pevné:
$$x_+^\lambda = \frac{1}{\lambda+\ell}\cdot\frac{\left(\frac{d}{dx}\right)^\ell x_+^{\lambda+\ell}}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+\ell-1)} \qquad \lambda \in P(-\ell,\varepsilon) \,;\, \varepsilon \in (0,1)$$

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:
$$\langle x_+^\lambda, \varphi\rangle = \frac{1}{\lambda+\ell}\cdot\underbrace{\frac{\left\langle\left(\frac{d}{dx}\right)^\ell x_+^{\lambda+\ell}, \varphi\right\rangle}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+\ell-1)}}_{F(\lambda)\in\mathcal{H}(P(-\ell))}$$

$$\Rightarrow \operatorname*{res}_{\lambda=-\ell}\langle x_+^\lambda, \varphi\rangle = F(-\ell)$$
$$= \frac{\left\langle\left(\frac{d}{dx}\right)^\ell x_+^0, \varphi\right\rangle}{(-(\ell-1))\cdots(-2)(-1)} = \frac{\left\langle\left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell-1}\frac{d}{dx}x_+^0, \varphi\right\rangle}{(-1)^{\ell-1}(\ell-1)!}$$

celkem: $$\operatorname*{res}_{\lambda=-\ell}\langle x_+^\lambda, \varphi\rangle = \frac{(-1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\left\langle\left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell-1}, \varphi\right\rangle$$

$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ … tj. platí 1. část věty
$$\operatorname*{res}_{\lambda=-\ell} x_+^\lambda = \frac{(-1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell-1}\delta_0$$

Pozn. jiný (hmatatelnější) způsob rozšíření x_+^λ:
$$\langle x_+^\lambda, \varphi\rangle = \int_0^\infty x_+^\lambda\varphi(x)\,dx = \int_0^1 x_+^\lambda\varphi(x)\,dx + \int_1^\infty x_+^\lambda\varphi(x)\,dx$$
$$= \underbrace{\int_0^1 x_+^\lambda[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx}_{\in\mathcal{H}(\operatorname{Re}\lambda>-2)} + \underbrace{\int_0^1 x_+^\lambda\varphi(0)\,dx}_{\frac{\varphi(0)}{\lambda+1} = \frac{\langle\delta_0,\varphi\rangle}{\lambda+1}} + \underbrace{\int_1^\infty x_+^\lambda\varphi(x)\,dx}_{\in\mathcal{H}(\lambda\in\mathbb{C})}$$

$\ell = 1 \to \quad \operatorname{res}_{\lambda=-1} x_+^\lambda = \delta_0$

Def.: Pro $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$ definujeme distribuce

$$\chi_+^\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ jako } \quad \frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$$

Pozn. $\lambda \mapsto \chi_+^\lambda$ je p.s.d., závisí holomorfně na $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$

čitatel O.K.

jmenovatel: $\Gamma(z) \neq 0$ a holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}$

Věta 27.6. Jestliže dodefinujeme $\chi_+^{-\ell} := \left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell-1} \delta_0$, $\ell \in \mathbb{N}$ závisí p.s.d. χ_+^λ holomorfně na $\lambda \in \mathbb{C}$.
Platí rovnost

$$\frac{d}{dx} \chi_+^\lambda = \chi_+^{\lambda-1}, \text{ pro } \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

dk.: $\chi_+^\lambda = \dfrac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$ na $P(-\ell)$; $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pevné

$$\langle x_+^\lambda, \varphi \rangle = \frac{1}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+\ell)} \left\langle \left(\frac{d}{dx}\right)^\ell x_+^{\lambda+\ell}, \varphi \right\rangle ; \lambda \in P(-\ell)$$

$$\Gamma(\lambda+1) = \frac{\Gamma(\lambda+\ell+1)}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+\ell)} \quad ; \lambda \in P(-\ell)$$

$$\langle \chi_+^\lambda, \varphi \rangle = \underbrace{\left\langle \left(\frac{d}{dx}\right)^\ell \chi_+^{\lambda+\ell}, \varphi \right\rangle}_{F(\lambda)}$$

pozoruji: $F(\lambda) \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(-\ell))$

$\langle \chi_+^{-\ell}, \varphi \rangle := F(-\ell)$ je holomorfní rozšíření LS

$$F(-\ell) = \left\langle \left(\frac{d}{dx}\right)^\ell \chi_+^0, \varphi \right\rangle = \left\langle \left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell-1} \delta_0, \varphi \right\rangle$$

$$\frac{\chi_+^0}{\Gamma(1)} = \text{Heaviside}$$

tj.: dodefinování uvedené ve znění věty je holomorfní

$$\operatorname{Re} \lambda > 1: \quad \frac{d}{dx} \chi_+^\lambda = \frac{d}{dx} \frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} = \frac{\lambda\, x_+^{\lambda-1}}{\lambda\, \Gamma(\lambda)} = \chi_+^{\lambda-1}$$

LS = PS pro $\operatorname{Re}\lambda > -1$ ... věta o jednoznačnosti $\Rightarrow$ LS = PS pro $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

Pozn.: Podobně definujeme $x_-^\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$x_-^\lambda = (-x)_+^\lambda \ ; \ tj. \ \langle x_-^\lambda, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (-x)^\lambda \varphi(x)\,dx \qquad Re\,\lambda > -1$$

$$\chi_-^\lambda = \frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} \ \dots \ \frac{d}{dx}\chi_-^\lambda = \chi_-^{\lambda-1} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

dále definujeme $|x|^\lambda := x_+^\lambda + x_-^\lambda$

$$|x|^\lambda \operatorname{sgn}(x) = \text{„} x^\lambda \text{"} = x_+^\lambda - x_-^\lambda$$

$$\lim_{\lambda \to -1} x_+^\lambda - x_-^\lambda = v.p.\frac{1}{x}$$

nyní je cíl: Fourierova transformace distribucí

Opakování: $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \ \dots \ \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i (\xi, x)}\,dx \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F}: f(x) \mapsto \hat{f}(\xi)$$

$$L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n) \ \dots \ \|\hat{f}\|_C = \sup|\hat{f}(\xi)| \le \|f\|_{L^1} = \int |f|$$

spojité, lineární

derivace $[D^\alpha f(x)]^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$

$$D^\beta \hat{f}(\xi) = [(-2\pi i x)^\beta f(x)]^\wedge(\xi)$$

pro f dost velké $\quad // \ \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} \ ; \ \xi \in \mathbb{R}^n$

Lemma 24.4. (o přehození) $f(x), g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,dx \ \dots \ \langle T_{\hat{f}}, g \rangle = \langle T_f, \hat{g} \rangle$$

idea: $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \ \dots \ \hat{T}$ definuj jako $\langle \hat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \hat{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

PROBLÉM: Věta 24.6: $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \ \& \ \hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \varphi \equiv 0$

řešení: použijeme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (Schwartzův prostor rychle klesajících funkcí) místo $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Pozn.: $x_-^\lambda := \begin{cases} 0 & ; x \geq 0 \\ (-x)^\lambda & ; x < 0 \end{cases} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})\ ;\ \mathrm{Re}\,\lambda > -1$

$$\langle x_-^\lambda, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{0} (-x)^\lambda \varphi(x)\,dx \underset{\text{subst.}}{=} \int_0^\infty x^\lambda \varphi(-x)\,dx = \langle x_+^\lambda, \varphi(-x) \rangle$$

$$\boxed{(x_+)^\lambda(-x) = (x_-)^\lambda(x)}$$

Def.: Schwartzův prostor „rychle klesajících" funkcí

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{ \varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : x^\alpha D^\beta \varphi(x) \overset{\forall \alpha \beta}{\text{omezená}} \}$$

Řekneme, že $f_n \to 0$ v $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, jestliže

$$x^\alpha D^\beta f_n \rightrightarrows 0 \text{ v } \mathbb{R}^n \text{ pro } \forall \alpha, \beta \text{ multiindex}$$

Pozn.: Věta 24.7.: 1. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ldots e^{-x^2}$

2. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)\ ;\ \forall p \in [1, \infty]$

3. $f(x) \in \mathcal{S} \Rightarrow x^\alpha f(x), D^\beta f(x) \in \mathcal{S}\ \forall \alpha, \beta$

V.24.8., V.24.11.: $\mathcal{F}$ je 1-1 zobrazení $\mathcal{S}$ na $\mathcal{S}$

Věta 27.7. 1. $\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \varphi_n \to 0$ v $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

2. $\varphi \mapsto x^\alpha \varphi$, $\varphi \mapsto D^\beta \varphi$ jsou spojitá, lineární zobrazení z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ do $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

3. $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je spojité, lineární zobrazení

Dk. 1. nechť $\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

(i) $\exists K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ; $\mathrm{supp}\, \varphi_n \subset K\ \forall n$

(ii) $D^\beta \varphi_n \rightrightarrows 0$ v K ; $\forall \beta$ pevné

$$|\underbrace{x^\alpha}_{\text{omezená na } K} D^\beta \varphi_n(x)| \leq \left. \begin{cases} 0 & ; x \notin K \\ c_\alpha |D^\beta \varphi_n(x)| \rightrightarrows 0 \end{cases} \right\} \rightrightarrows 0 \text{ v } \mathbb{R}^n$$

2. d.cv., viz podobné tvrzení pro $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

3. ?? spojitost: důkaz V.24.8:

$$\xi^\alpha D^\beta \hat{f}(\xi) = (2\pi i)^{-|\alpha|} \left[D^\alpha \{ (-2\pi i x)^\beta f(x) \} \right]^\wedge (\xi)$$

$$\sup_\xi |\xi^\alpha D^\beta \hat{f}(\xi)| \leq C_{\alpha\beta} \int_{\mathbb{R}^n} |\underbrace{D^\alpha \{ x^\beta f_n(x) \}}_{g_n(x)}|\,dx$$

$f_n \to 0$ v $\mathcal{S} \Rightarrow g_n \to 0$ v $\mathcal{S}$ (bod 2)

spec.: $(1+|x|^2)^N g_n(x) \rightrightarrows 0$ v $\mathbb{R}^n$

velké $N \in \mathbb{N}$ ... $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^N} = C < \infty$

$n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \sup (1+|x|^2)^N g_n(x) < \frac{\varepsilon}{C \cdot C_{\alpha\beta}}$

$\sup_\xi |\xi^\alpha D^\beta \hat{f}(\xi)| \leq$

$$\leq C_{\alpha\beta} \int_{\mathbb{R}^n} |g_n(x)|\, dx = C_{\alpha\beta} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(1+|x|^2)^N g_n(x)}_{\leq \frac{\varepsilon}{C C_{\alpha\beta}}} \cdot \frac{1}{(1+|x|^2)^N} dx \leq \varepsilon$$

tj. $\xi^\alpha D^\beta \hat{f}_n(\xi) \rightrightarrows 0$ v $\mathbb{R}^n$

Def. Temperovanou distribucí v $\mathbb{R}^n$ rozumíme spojité lineární zobrazení $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$

$$\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$$

Prostor temperovaných distribucí značíme $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Konvergence: $T_n \to T$ v $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Pozn. ① $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$: temperovaná distribuce je distribuce (umírněná)

$T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ $\qquad T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ lineární

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

spojitost: $\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \varphi_n \to 0$ v $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle T, \varphi_n \rangle \to 0$$

② Lemma 27.2. verze $\mathcal{S}$: $\Phi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ lineární, spojité

definuji $\Phi' : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

takto $\langle \Phi'(T), \varphi \rangle = \langle T, \Phi(\varphi) \rangle \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Potom: Φ' je spojité lineární zobrazení

spec.: $\Phi'(T) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ pro $\forall T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Dk. úplně stejně jako v původní verzi

③ derivace v $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:

$T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; α .. multiindex :

$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := \langle T, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$D^\alpha : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ spojité, lineární

Příkl.: ① $f(x) = e^{2x^2} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \Rightarrow T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{2x^2} \varphi(x)\, dx$$

avšak $T_f \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$: volme $\varphi(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{2x^2} \cdot e^{-x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{x^2} dx = \infty$$

② lze dokázat : $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pro nějaké $p \in [1, \infty] \Rightarrow$

$\Rightarrow T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$f(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$; $\exists N \ldots (1+|x|^2)^N f(x)$ omezená $\Rightarrow$

$\Rightarrow T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

„pomalu rostoucí (moderované) funkce"

③ lze dokázat : $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, T má kompaktní nosič $\Rightarrow$

$\Rightarrow T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

spec. $\delta_a \in \mathcal{S}'$ (zřejmé i z definice)

Def.: Nechť $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Pak definujeme její Four. tr.

$\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ jako $\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Věta 27.8. $T \to \hat{T}$ je spojité, lineární, 1-1 na $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Příkl.: $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \ldots T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; $\hat{T}_f = T_{\hat{f}}$

$$\langle \hat{T}_f, \varphi \rangle = \langle T_f, \hat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{\varphi}(x)\,dx \overset{L.24.4.}{=\!=} \int \hat{f}(x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= \langle T_{\hat{f}}, \varphi \rangle$$

② $\hat{\delta}_a = e^{-2\pi i (a,x)} = \cos(2\pi(a,x)) - i\sin(2\pi(a,x))$

$$\langle \hat{\delta}_a, \varphi \rangle = \langle \delta_a, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(a) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i (a,x)}\, dx =$$

$$= \langle T_{e^{-2\pi i (a,x)}}, \varphi \rangle$$

spec $\hat{\delta}_0 = 1$

③ $\left(v.p.\ \frac{1}{x}\right)^{\wedge} = -\frac{i\pi}{2}\, sgn(y)$

$$\langle \widehat{v.p.\ \tfrac{1}{x}}, \varphi \rangle = \langle v.p.\ \tfrac{1}{x}, \hat{\varphi} \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}_\varepsilon} \frac{\hat{\varphi}(x)}{x}\, dx =$$

$$\mathbb{R}_\varepsilon = \left(-\tfrac{1}{\varepsilon}, -\varepsilon\right) \cup \left(\varepsilon, \tfrac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{x \in \mathbb{R}_\varepsilon} \int_{y \in \mathbb{R}} \frac{1}{x} \varphi(y) e^{-2\pi i x y}\, dy\, dx$$

Fubini:

$$\int_{y \in \mathbb{R}} \varphi(y) \int_{x \in \mathbb{R}_\varepsilon} \frac{1}{x} \left(\underbrace{\cancel{\cos(2\pi y x)}}_{\text{lichá část}} - i \sin(2\pi x y) \right) dx\, dy$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}_\varepsilon} \frac{\sin a x}{x} = \frac{\pi}{2}\, sgn(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\to -\frac{i\pi}{2} \int \varphi(y)\, sgn(y)\, dy$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{ \varphi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}\ ;\ x^\alpha D^\beta \varphi(x) \text{ omezené } \forall \alpha, \beta \}$
„Schwartzův prostor"

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: spojité, lineární $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$
„temperovaná distribuce"

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \supsetneq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \ \dots\ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Pozn. $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

- $\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := \langle T, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi \rangle$
- $\langle T(Ax+b), \varphi(x) \rangle := \langle T(y), \frac{1}{|\det A|} \varphi(A^{-1}(y-b)) \rangle$

$a(x)$ $C^\infty(\mathbb{R}^n)$; „pomalu rostoucí"

- $\langle a(x) T(x), \varphi(x) \rangle = \langle T(x), a(x) \varphi(x) \rangle$

Def Nechť $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Pak definuji její Four. tr. $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ jako

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle \quad ; \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Věta 27.8 Zobrazení $T \to \hat{T}$ je spojité, lineární, vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ na $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

dk. spojité, lineární $\Leftarrow$ Lemma 27.2 - 9, 8 $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ spoj, lin („o duálním zobrazení") $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ do $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

? prosté: $\hat{T} = 0 \Rightarrow T = 0$

$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ lib : $\exists \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\hat{\psi} = \varphi$

(Four. tr. je 1-1 na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\psi} \rangle = \langle \hat{T}, \psi \rangle = 0$$

φ libovolné : $T = 0$

? na: $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dáno $\Rightarrow \exists T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; $\hat{T} = S$

definuji $\langle T, \varphi \rangle := \langle S, \check{\varphi} \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: $\varphi \to \check{\varphi}$ je spojité, lineární v $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ & L. 27.2. - 9.

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle = \langle S, (\hat{\varphi})^\vee \rangle = \langle S, \varphi \rangle ; \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

tj: $\hat{T} = S$

Def: Pro $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definuji inverzní Four. tr. jako

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle \quad ; \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Pozn. $T \to \check{T}$ je spojité, lineární zobrazení $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ vzájemně jednoznačně na sebe

$$(\hat{T})^\vee = (\check{T})^\wedge = T \quad \forall\, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

Věta 27.9 [Vlastnosti F. tr. v $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$]
Nechť $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$
Potom
1. $\check{T}(-x) = \hat{T}(x)$
2. $\overline{\check{T}}(x) = \hat{\overline{T}}(x)$; $\overline{\hat{T}}(x) = \check{\overline{T}}(x)$
3. $\hat{T}(y-a) = \left[e^{2\pi i(a,x)}\, T(x)\right]^\wedge(y)$
4. $\left[T(x-a)\right]^\wedge(y) = e^{-2\pi i(a,y)}\, \hat{T}(y)$
5. $\left[T(\varepsilon x)\right]^\wedge(y) = \frac{1}{|\varepsilon|^n}\, \hat{T}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$
6. je-li T sudá (resp. lichá či radiální) pak $\hat{T}$ má stejnou vlastnost
7. $\left[D^\alpha T\right]^\wedge(y) = (2\pi i y)^\alpha\, \hat{T}(y)$
8. $D^\beta \hat{T}(y) = \left[(-2\pi i y)^\beta\, T(x)\right]^\wedge(y)$

Pozn. pro (dosti hladké) funkce dokázáno ve větách 24.1., 24.2., 24.4.

Pozn. jak definovat $\overline{T}$?

$$f(x) \in L^1_{loc} \qquad \langle T_{\bar{f}}, \varphi\rangle = \int \bar{f}(x)\,\varphi(x)\,dx = \int \overline{\overline{\bar{f}(x)\,\varphi(x)}}\,dx =$$

$$= \overline{\int f(x)\,\overline{\varphi}(x)\,dx} = \overline{\langle T_f, \overline{\varphi}\rangle}$$

$$\langle \overline{T}, \varphi\rangle := \overline{\langle T, \overline{\varphi}\rangle} \quad ; \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$
$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

dk. 1. $\langle \check{T}(-x), \varphi(x)\rangle = \langle \check{T}(x), \varphi(-x)\rangle = \langle T(x), \underbrace{(\varphi(-x))^\vee}_{\hat{\varphi}(x)}\rangle =$

$= \langle T(x), \hat{\varphi}(x)\rangle = \langle \hat{T}(x), \varphi(x)\rangle$

2. $\langle \overline{\hat{T}}(x), \varphi(x)\rangle = \overline{\langle \hat{T}, \overline{\varphi}\rangle} = \overline{\langle T, \underbrace{\hat{\overline{\varphi}}}_{\overline{\check{\hat{\varphi}}}}\rangle} = \overline{\langle T, \overline{\check{\hat{\varphi}}}\rangle} =$

$= \langle \overline{T}, \check{\hat{\varphi}}\rangle = \langle \check{\hat{\overline{T}}}, \varphi\rangle$

dostatečně hladká

3. $\langle \hat{T}(y-a), \varphi(y)\rangle = \langle \hat{T}(x), \varphi(x+a)\rangle_x = \langle T(y), \overbrace{[\varphi(x+a)]^{\wedge}(y)}^{e^{2\pi i(a,y)}\hat{\varphi}(y)}\rangle_y =$

$= \langle e^{2\pi i(a,y)} T(y), \hat{\varphi}(y)\rangle = \langle [e^{2\pi i(a,y)} T(y)]^{\wedge}(x), \varphi(x)\rangle$

4., 5, 6, 7 d. cv.

8. $\langle D^\beta \hat{T}(y), \varphi(y)\rangle = (-1)^{|\beta|}\langle \hat{T}(y), D^\beta\varphi(y)\rangle = (-1)^{|\beta|}\langle T(y), [D^\beta\varphi(x)]^{\wedge}(y)\rangle$

$\overset{7}{\Rightarrow} (2\pi i y)^\beta \hat{\varphi}(y)$

$= \langle (-2\pi i y)^\beta T(y), \hat{\varphi}(y)\rangle = \langle [(-2\pi i y)^\beta T(y)]^{\wedge}(x), \varphi(x)\rangle$

Příklady:

① $\hat{\delta}_a = e^{-2\pi i(a,x)}$; $a \in \mathbb{R}^n$

$\check{\hat{\delta}}_a(x) = \hat{\delta}_a(-x) = e^{2\pi i(a,x)} \quad | F$

$\delta_a(y) = [e^{2\pi i(a,x)}]^{\wedge}(y)$ speciálně $\hat{1} = \delta_0$

d. cv. $\begin{matrix}\cos(a,x)\\ \sin(a,x)\end{matrix} \xrightarrow{F} ?$

② $(\text{v.p. } \frac{1}{x})^{\wedge}(y) = -i\pi \operatorname{sgn}(y) \Big|_{F^{-1}}$

$\text{v.p. } \frac{1}{x} = (-i\pi \operatorname{sgn}(y))^{\vee}(x) = i\pi (\operatorname{sgn} y)^{\wedge}(x)$

Heavisideova funkce $h \xrightarrow{F} ?$

Pozn. tenzorový součin $f \otimes g \quad (= fg)$

$f(x): \Omega_1 \to R \qquad (f \otimes g)(x,y): \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$

$g(y): \Omega_2 \to R \qquad (x,y) \mapsto f(x)\,g(y)$

nechť $f, g \in L^1_{loc}$ na Ω_1, Ω_2 ($\Rightarrow f \otimes g \in L^1_{loc}(\Omega_1 \times \Omega_2)$)

$$\varphi = \varphi(x,y) \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$$

$$\langle T_{f\otimes g}, \varphi \rangle = \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x) g(y) \varphi(x,y)\, dx\, dy \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= \int_{\Omega_1} f(x) \left(\int_{\Omega_2} g(y) \varphi(x,y)\, dy \right) dx = \left\langle T_f(x), \langle T_g(y), \varphi(x,y) \rangle_y \right\rangle_x$$

nebo

$$\int_{\Omega_2} g(y) \left(\int_{\Omega_1} f(x) \varphi(x,y)\, dx \right) dy = \left\langle T_g(y), \langle T_f(x), \varphi(x,y) \rangle_x \right\rangle_y$$

Def: Nechť $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, nechť $S \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$, kde $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené

Pak definujeme

$$T \otimes S \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2) \text{ předpisem}$$

$$\langle T \otimes S, \varphi \rangle = \left\langle T(x), \langle S(y), \varphi(x,y) \rangle_y \right\rangle_x \text{ pro } \forall \varphi = \varphi(x,y) \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$$

Pozn. ověření korektnosti definice nebudeme provádět

Věta 27.10.* [Vlastnosti tenzorového součinu distribucí]

1. $\left\langle T(x), \langle S(y), \varphi(x,y) \rangle_y \right\rangle_x = \left\langle S(y), \langle T(x), \varphi(x,y) \rangle_x \right\rangle_y$

   tzv. distributivní Fubiniho věta

2. $\operatorname{supp}(T \otimes S) \subset \operatorname{supp} T \times \operatorname{supp} S$

3. $T_n \to T$ v $\mathcal{D}'(\Omega_1) \Rightarrow T_n \otimes S \to T \otimes S$ v $\mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$

4. $D_x^\alpha (T \otimes S) = (D_x^\alpha T) \otimes S$; $D_y^\beta (T \otimes S) = T \otimes D_y^\beta S$

Příklad: $\delta_a \otimes \delta_b \; ; a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$

$\varphi = \varphi(x,y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$

$$\langle \delta_a \otimes \delta_b , \varphi \rangle = \langle \delta_a(x), \langle \delta_b(y), \varphi(x,y) \rangle_y \rangle_x$$
$$= \langle \delta_a(x), \varphi(x,b) \rangle_x$$
$$= \varphi(a,b) = \langle \delta_{(a,b)}, \varphi \rangle$$

$$\delta_a \otimes \delta_b = \delta_{(a,b)}$$

opakování: $f(x), g(x) : \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

konvoluce $\quad (f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x-y)\, dy$

platí $\quad f * g = g * f \quad$ komutativita

$f*(g*h) = (f*g)*h \quad$ asociativita

$$D^\alpha \{ f * g \} = \{ D^\alpha f \} * g = f * \{ D^\alpha g \}$$

dk. (formální)

$$D_x^\alpha \{ f * g \}(x) = D_x^\alpha \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x-y)\, dy =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) (D_x^\alpha g)(x-y)\, dy = \{ f * D_x^\alpha g \}(x)$$

důsledek: „$f*g$ je tak hladká, jako f a g dohromady"

$$D^{\alpha+\beta} \{ f * g \} = D^\alpha f * D^\beta g$$

Fourierova transformace a konvoluce

$$F\{f*g\} = Ff \cdot Fg \quad \Big| \text{ hladkost } f \longleftrightarrow \text{ pokles } Ff \text{ pro } |\xi| \to \infty$$

Pojem: „fundamentální řešení"

(1) $\quad \mathcal{D}[u] = f \; \ldots$ pravá strana

↳ diferenciální operátor $\mathcal{D} = \partial_t - \Delta_x$

Fundamentální řešení je U takové, že $\mathcal{D}[U] = \delta_0$

tvrdím $\quad u$ je fund. řeš. $\Rightarrow \quad u := U * f$ řeší (1) dk.

$$\mathcal{D}[u] = \mathcal{D}[U * f] = \mathcal{D}[U] * f = \delta_0 * f = f$$

δ_0 je neutrální prvek pro $*$: $\delta_0 * f = f * \delta_0 = f$

motivační výpočet č. 1 : $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x-y)\, dy = \langle T_f(y), g(x-y) \rangle_y$$

Definice [konvoluce verze 1]

Nechť $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Pak definujeme konvoluci $T * \varphi$ předpisem

$$(T * \varphi)(x) := \langle T(y), \varphi(x-y) \rangle_y \quad \text{pro } \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Věta 27.11. Nechť $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, potom $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

a platí $D^\alpha \{T * \varphi\} = D^\alpha T * \varphi = T * D^\alpha \varphi$

dk. (nástřel)

spojitost $x \longmapsto (T * \varphi)(x)$

$$\overset{\shortparallel}{\langle T(y), \varphi(x-y) \rangle_y}$$

je třeba ověřit, že $\lim x_m \to x_0 \Rightarrow \varphi(x_m - y) \to \varphi(x_0 - y)$ v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

jakožto funkce proměnné y

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(T * \varphi)(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \{ (T * \varphi)(x + h e_1) - (T * \varphi)(x) \} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \langle T(y), \underbrace{\frac{\varphi(x + h e_1 - y) - \varphi(x-y)}{h}} \rangle$$

$\longrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x-y)$: bodově zjevné ale též v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$= \langle T(y), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x-y) \rangle_y = T * \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(T * \varphi)(x) = \left(T * \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)(x) = \langle T(y), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x-y) \rangle =$$

$$= \langle T(y), -\frac{\partial}{\partial y_1}\{\varphi(x-y)\} \rangle_y = \langle \frac{\partial}{\partial y_1} T(y), \varphi(x-y) \rangle_y = \left(\frac{\partial T}{\partial x_1} * \varphi\right)(x)$$

motivační výpočet č. 2 : $f(x), g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\langle T_{f*g}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x-y)\, dy \right) \varphi(x)\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\, \varphi(x)\, dx \right) dy = \Big| \; x \leftarrow x + y$$

$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x)\, \varphi(x+y)\, dx\, dy = \langle T_f \otimes T_g \,,\, \varphi(x+y)\rangle$

Idea: $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ $\quad T \circledast S$ definuji jako

$$\langle T * S, \varphi\rangle := \langle (T \otimes S)(x,y), \varphi(x,y)\rangle_{x,y} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Problém: $\varphi(x+y)$ nemá kompaktní nosič

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$: $\operatorname{supp}\varphi \subset \{|x| < R\} \Rightarrow \operatorname{supp}\varphi(x+y) \subset \{(x,y), |x+y| < R\}$

neomezená množina

Značení $\Omega_R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, |x+y| < R\}$

Def [Konvoluce 2. verze] Nechť $T, S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, nechť navíc$^{(\square)}$ je

$\operatorname{supp} T \otimes S \cap \Omega_R$ omezená množina pro $\forall R > 0$

Potom definujeme konvoluci $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ jako

$$\langle T * S, \varphi\rangle := \langle T \otimes S(x,y), \eta(x,y)\varphi(x+y)\rangle_{x,y} \, ; \, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

kde $\eta = \eta(x,y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ takové, že $\eta \equiv 1$ na okolí

$\operatorname{supp} T \otimes S \cap \operatorname{supp}\varphi(x+y)$

Pozn: podmínka navíc$^{(\square)}$ je splněna, pokud T nebo S mají omezený nosič

obecněji mají-li T a S omezený nosič z téže (jedné) strany

Pozn. $T * S$ je korektně definovaná distribuce, ? nezávisí na konkrétní volbě η : $\eta, \tilde{\eta} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $\eta = \tilde{\eta} \equiv 1$ na

$\operatorname{supp} T \otimes S \cap \operatorname{supp}\varphi(x+y)$: $\quad \langle T \otimes S, \eta\varphi(x+y)\rangle \overset{?}{=} \langle T \otimes S, \tilde{\eta}\varphi(x+y)\rangle$

$\langle T \otimes S, \underbrace{(\eta - \tilde{\eta})\varphi(x+y)}_{\psi}\rangle$ $\quad ; \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$

$\psi = 0$ na $\operatorname{supp} T \otimes S$ ($\Rightarrow$ jsem hotov)

$(x,y) \in \operatorname{supp} T \otimes S$: $\begin{cases} (x,y) \in \operatorname{supp}\varphi(x+y) \Rightarrow \eta - \tilde{\eta} = 0 \\ (x,y) \notin \operatorname{supp}\varphi(x+y) \Rightarrow \varphi(x+y) = 0 \end{cases}$

Příklad: $T * \delta_0 = T$; $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$: dodatečná podmínka$^{(\square)}$ je splněna

$$\langle T * \delta_0, \varphi\rangle = \langle T \otimes \delta_0, \eta\varphi(x+y)\rangle_{x,y} \, ; \, \eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

$\eta \equiv 1$ na $\operatorname{supp} T \otimes \delta \cap \operatorname{supp}\varphi(x+y)$

$$= \langle T(x), \langle \delta_0(y), \eta(x,y)\varphi(x+y)\rangle_y\rangle_x = \langle T(x), \eta(x,0)\varphi(x)\rangle_x$$

volme $y = 0$: $\eta = 1$ na $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp}\varphi(x)$

Věta 27.12.*

1. $T * S = S * T$ (komutativita)

2. mají-li alespoň dvě z distribucí T, S, R omezený nosič, pak $(T*S)*R = T*(S*R)$ (asociativita)

3. $D^\alpha (T*S) = D^\alpha T * S = T * D^\alpha S$

4. $\operatorname{supp} T*S \subset \underbrace{\operatorname{supp} T + \operatorname{supp} S}_{=:\{a+b,\ a\in \operatorname{supp} T,\ b \in \operatorname{supp} S\}}$

Příkl. ① $T * \delta_0 = T = \delta_0 * T$

② $T * \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \delta_0 = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \{T * \delta_0\} = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 T$

③ $(T * \delta_a)(x) = T(x-a)$

④ protipříklad k V 27.12./2

uvažujeme distribuce 1, $\frac{d}{dx}\delta_0$, $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

jen jedna má omezený nosič

$$1 * \left(\frac{d}{dx}\delta_0 * h\right) = 1 * \frac{d}{dx}\big(\underbrace{\delta_0 * h}_{h}\big) = 1 * \delta_0 = 1$$

$$\left(1 * \frac{d}{dx}\delta_0\right) * h = \left(\frac{d}{dx} 1 * \delta_0\right) * h = 0$$

Příkl. Zavedení necelých derivací

$\chi_+^\lambda := \frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$; ... lze rozšířit pro $\lambda \in \mathbb{C}$ (holomorfní)

platí: $\frac{d}{dx}\chi_+^\lambda = \chi_+^{\lambda-1}$ $\qquad \chi_+^\lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$\chi_+^{-k} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{k-1}\delta_0 \qquad \operatorname{supp} \chi_+^\lambda = [0,\infty)$

Pro $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$; $\operatorname{supp} g \subset [0,\infty)$ definuji $d^\lambda g =: g * \chi_+^{-1-\lambda}$

platí: konvoluce je definována (nosiče jsou zleva omezené)

$$d^0 g = g * \chi_+^{-1} = g * \delta_0 = g$$

$$d^1 g = g * \chi_+^{-2} = g * \left(\frac{d}{dx}\delta_0\right) = \frac{d}{dx} g$$

obecněji

$$d^n g = \left(\frac{d}{dx}\right)^n g \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

$$d^{-1} g = g * \chi_+^0 = g * h \leftarrow \text{primitivní distribuce}$$

$$\frac{d}{dx}\left(d^{-1} g\right) = \frac{d}{dx}(g * h) = g * \underbrace{\frac{dh}{dx}}_{\delta_0} = g$$

Obecně platí $\quad d^\lambda (d^\mu g) = d^{\lambda+\mu} g \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

dk. $\quad LS = (d^\mu g) * \chi_+^{-1-\lambda} = \left(g * \chi_+^{-1-\mu}\right) * \chi_+^{-1-\lambda}$

$\quad PS = g * \chi_+^{-1-\mu-\lambda}$

BÚNO: $\mu = -\beta \qquad ; \quad Re\, \alpha, \beta > 1$

(1. krok) $\lambda = -\alpha$

stačí ukázat $\quad \chi_+^{-1+\alpha+\beta} = \chi_+^{\alpha-1} * \chi_+^{\beta-1}$

$$\chi_+^{-1+\alpha} * \chi_+^{-1+\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \underbrace{x_+^{\alpha-1} * x_+^{\beta-1}}_{K}$$

$$K = \int_{\mathbb{R}} (y)_+^{\alpha-1} (x-y)_+^{\beta-1}\, dy = \int_0^x \dots\, dy = \left| \begin{array}{l} y = xt \quad , t \in (0,1) \\ dy = x\,dt \end{array} \right.$$

$$= x^{\alpha+\beta-1} \underbrace{\int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}\, dt}_{B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}}$$

Poznámka: $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ s kompaktním nosičem:

$\Rightarrow T * S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (formálně definice jako výše)

a platí $\quad \mathcal{F}(T * S) = \mathcal{F}T \cdot \mathcal{F}S$

Pozn. $\quad S$ má kompaktní nosič $\Rightarrow S$ je temperovaná

$\mathcal{F}S \in C^\infty$; „pomalu rostoucí"