29. Diferenciální formy

kapitoly 19, 20 (křivkový a plošný integrál)

∇, div, rot $\qquad \int_{\gamma} \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s} = \int_{P} \operatorname{rot} F \cdot d\underset{\sim}{S} \qquad d\underset{\sim}{S} = \partial_u \varphi \times \partial_v \varphi$

$$ds = (\varphi_1', \varphi_2', \varphi_3')$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \underset{\sim}{F} = \int_{\partial\Omega} \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{n}\, dS$$

„Def" Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ dimenze n

Vnější součin je přiřazení $u, v \longmapsto u \wedge v$

splňující:

$u, v, w \in V$, $a \in \mathbb{R}$

(o) $(au) \wedge v = u \wedge (av) = a(u \wedge v)$

(i) $u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$
$\quad (u + v) \wedge w = u \wedge w + v \wedge w$ (distr.)

(ii) $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$ (asoc.)

(iii) $u \wedge v = - v \wedge u$ (antikom.)

Pro $k = 1, \dots, n$ definujeme

$$\Lambda^k(V) = \underbrace{\mathrm{Lin}}_{\text{lineární obal}}\{\underbrace{v_1 \wedge \dots \wedge v_k}_{k\text{-vektory ve } V}\ ;\ v_k \in V\}$$

Zjevně $\Lambda^1(V) = V$, klademe $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$

Tzv. Grassmanova algebra nad V je

$$\Lambda^*(V) := \mathrm{Lin}\left\{\bigcup_{k=0}^{n} \Lambda^k(V)\right\}$$

<u>Pozn.</u> ① Pozorování $\quad u \wedge u = 0 \quad \forall u \in V$

(iii) $u \wedge u = - u \wedge u$

$2 u \wedge u = 0$

$u \wedge u = 0$

obecněji $u_1, \dots, u_k$ LZ $\Rightarrow u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_k = \bigwedge_{j=1}^{k} u_j$

nechť BÚNO: $u_1 = \sum_{j=2}^{k} a_j u_j \quad \dots \quad u_1 \wedge u_2 \wedge \dots u_k$

$$= (a_2 u_2 + \dots + a_k u_k) \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_k =$$

$$\underset{(0),(1)}{=} \sum_{j=2}^{k} a_j u_j \wedge (u_2 \wedge \dots u_k)$$

leč: $u_j \wedge (u_2 \wedge u_j \wedge u_k) = (-1)^{j-2} u_2 \wedge \dots \underbrace{u_j \wedge u_j}_{} \dots u_k$

(2) nemá smysl definovat $\Lambda^k(V)$; $k > n = \dim V$ $=0$

neboť k-vektory jsou nulové pro $k > n$

(3) $\Lambda^k(V)$ ... vektorový prostor (prvky lze sčítat, násobit skalárem)

$\Lambda^*(V)$ ... algebra (vektorový prostor; navíc prvky lze vzájemně násobit)

Jiný pohled na $\Lambda^k(V)$: $\{e_1, \dots, e_n\}$ .. báze V

$$I(k,n) = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k);\ 1 \le \alpha_1 < \dots < \alpha_k \le n\}$$

$$k = 1, \dots, n$$

pro $\alpha \in I(k,n)$ označíme $e_\alpha := e_{\alpha_1} \wedge \dots e_{\alpha_k}$

Potom $\{e_\alpha;\ \alpha \in I(k,n)\}$ je báze $\Lambda^k(V)$

Speciálně: $\dim \Lambda^k(V) = \# I(k,n) = \binom{n}{k}$

$\hookrightarrow$ počet prvků množiny

Příkl: $u = (1,0,2,3)$
$v = (-1,0,0,1)$ $\in \mathbb{R}^4$ $\quad \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ kanonická báze

$u \wedge v = (e_1 + 2e_3 + 3e_4) \wedge (-e_1 + e_4) =$

$$= \underbrace{-e_1 \wedge e_1}_{=0} + \underbrace{e_1 \wedge e_4}_{e_{14}} \underbrace{-2e_3 \wedge e_1}_{-2e_{13}} + 2e_3 \wedge e_4 \underbrace{-3e_4 \wedge e_1}_{-3e_{14}} + \underbrace{3e_4 \wedge e_4}_{=0}$$

$= 4e_{14} + 2e_{13} + 2e_{34}$; $\{e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}\}$

báze $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)$

Lemma 29.1. Nechť $\{v_j\}_{j=1}^k$, $\{u_j\}_{j=1}^k$ splňují

$$v_j = \sum_{l=1}^k a_{lj} u_l \quad ; \quad j = 1, \dots, k$$

kde $A = \{a_{ij}\}$ je matice $k \times k$

Potom $v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \det A \; u_1 \wedge \dots \wedge u_k$

dk. $v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \left(\sum_{l_1=1}^k a_{l_1 1} u_{l_1}\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{l_k=1}^k a_{l_k k} u_{l_k}\right) =$

$$= \sum_{l_1, \dots, l_k = 1}^k a_{l_1 1} \cdots a_{l_k k} \, u_{l_1} \wedge \dots \wedge u_{l_k} =$$

pozorují $u_{l_1} \wedge \dots u_{l_k} \neq 0 \Rightarrow l_j$ různé

$\exists$ permutace π množiny $\{1, \dots, k\}$ tak, že

$l_j = \pi(j)$

$$= \sum_{\pi} \underbrace{a_{\pi(1)1} \cdots a_{\pi(k)k}}_{\det A} \; \underbrace{u_{\pi(1)} \wedge \dots \wedge u_{\pi(k)}}_{(-1)^{s(\pi)} u_1 \wedge \dots \wedge u_k}$$

$s(\pi)$ .. počet transpozic

Důsl.: $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; platí

$u_j = \sum_{l=1}^n a_{lj} e_l$; $\{e_1, \dots, e_n\}$ kan. báze

$\Rightarrow u_1 \wedge \dots \wedge u_n = \det A \cdot \underbrace{e_1 \wedge \dots \wedge e_n}_{e_{12\dots n}}$

tj. $\dim \Lambda^n(\mathbb{R}^n) = 1$

Pozn. obecněji platí: $\{u_j\}_{j=1}^{k}$ LN ; $\{v_j\}_{j=1}^{k}$ LN vektory

Potom $\mathrm{Lin}\{u_1,\dots,u_n\} = \mathrm{Lin}\{v_1,\dots,v_n\} \iff \exists\, \lambda \neq 0$ tak, že $u_1\wedge\dots\wedge u_k = \lambda v_1 \wedge \dots \wedge v_k$

Příkl.: $\mathrm{Lin}\{\underset{u}{(1,1,0,1)}, \underset{v}{(-1,0,0,1)}\} \overset{?}{=}$

$\overset{?}{=} \mathrm{Lin}\{\underset{w}{(0,\tfrac{1}{2},0,1)}, \underset{z}{(-1,1,0,3)}\}$

$$u\wedge v = (e_1+e_2+e_4)\wedge(-e_1+e_4) = 2e_{14} + e_{12} + e_{24}$$

$$w\wedge z = (\tfrac{1}{2}e_2 + e_4)\wedge(-e_1+e_2+3e_4) = \tfrac{1}{2}e_{12} + \tfrac{3}{2}e_{24} + e_{14} - e_{24}$$

$$2\, w\wedge z = u\wedge v$$

Značení: V dalším pracujeme s vektorovým prostorem

$T^*(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Lin}\{dx_1, \dots, dx_n\}$

Vektory dx_j (někdy píšeme $dx, dy, dt, \dots$)

odvozujeme od symbolu proměnné v daném prostoru

Def: Nechť $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina.

Diferenciální formou řádu k v $\mathcal{O}$ rozumíme

C^∞ zobrazení $\omega: \mathcal{O} \to \Lambda^k(T^*(\mathbb{R}^n))$

tj: formální součet $\omega = \sum_{\alpha\in I(k,n)} \omega_\alpha\, dx_\alpha$; kde $\omega_\alpha: \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ ~~jsou C^∞~~

jsou C^∞ funkce a $dx_\alpha = dx_{\alpha_1}\wedge\dots\wedge dx_{\alpha_k}$

$E^k(\mathcal{O})$ ... prostor všech k-forem v $\mathcal{O}$

Příkl. (1) $\omega = z e^{x-y}\cdot dx\wedge dy \in E^2(\mathbb{R}^3)$; $\mathbb{R}^3 \ni (x,y,z)$

(2) $\omega = (x_1 - x_2)\, dx_{1,2,3} - x_1 \sin x_3\, dx_{1,4,5} \in E^3(\mathbb{R}^5)$; $\mathbb{R}^5 \ni (x_1,\dots,x_5)$

Pozn. $E^0(\sigma)$ ... skalární funkce $\sigma \to \mathbb{R} = \Lambda^0(T^*(\mathbb{R}^n))$

$\omega \in E^1(\sigma)$ ... $\omega = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \, dx_j$ ... vekt. fce se složkami $(\omega_1, \dots, \omega_n)$

$\sigma \to \mathbb{R}^n$

Def: Vnější diferenciál $d\omega$ formy $\omega \in E^q(\sigma)$ definujeme takto:

1. $\omega \in E^0(\sigma)$: $d\omega := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} dx_j$

2. $\omega \in E^q(\sigma)$ obecné, tj. $\omega = \sum_{\alpha \in I(q,n)} \omega_\alpha \, dx_\alpha$

$$d\omega = \sum_{\alpha} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{viz bod 1.}}}{(d\omega_\alpha)} \wedge dx_\alpha = \sum_{\alpha} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_\alpha$$

Příkl.: $\omega = z e^{x-y} \, dx \wedge dy$

$$d\omega = d(z e^{x-y}) \wedge dx \wedge dy = e^{x-y} \underbrace{dz \wedge dx \wedge dy}_{= dx \wedge dy \wedge dz}$$

$$d(z e^{x-y}) = z e^{x-y} dx - z e^{x-y} dy + e^{x-y} dz$$

Pozn. ① $d: E^q(\sigma) \to E^{q+1}(\sigma)$; $q = 0, \dots, n-1$

tj. d rozšiřuje řád formy o 1

② linearita : $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$

$dx_1 = \dots \in T^*(\mathbb{R}^n)$; $\mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n)$

$$d(x_1) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_1}{\partial x_j} dx_j = 1 \cdot dx_1$$

0-forma (skalární fce v $\mathbb{R}^n$)

Pozn.: $F = F(x_1, x_2, x_3)$ $\quad dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3} dx_3 =$

$=_{\kappa}$ "∇F"

$\left(G_1(x,y), G_2(x,y) \right) \qquad \omega = G_1 dx + G_2 dy$

$$d\omega = \left(\frac{\partial G_1}{\partial x} dx + \frac{\partial G_1}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} dx + \frac{\partial G_2}{\partial y} dy \right) \wedge dy =$$

$$= \frac{\partial G_1}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial G_2}{\partial x} dx \wedge dy =$$

$$= \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

Věta 29.1. Pro libovolnou formu $\omega \in E^{\ell}(\sigma)$ je $d(d\omega) = 0$

Dk.: $\omega = \cancel{\sum_{\alpha \in I(\ell,n)}} \omega_\alpha \, dx_\alpha \qquad d(\omega_\alpha dx_\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_\alpha$

BÚNO sumu vynecháme

$$d(d\omega_\alpha) = \sum_{j=1}^{n} d\underbrace{\left(\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_j} \right)}_{\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega_\alpha}{\partial x_\ell \partial x_j} dx_\ell} dx_j \wedge dx_\alpha =$$

$$= \sum_{j,\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega_\alpha}{\partial x_\ell \partial x_j} (dx_\ell \wedge dx_j) \wedge dx_\alpha$$

stačí pro $\ell \neq j$

$$= \sum_{j,\ell=1;\, j<\ell}^{n} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \omega_\alpha}{\partial x_\ell \partial x_j} - \frac{\partial^2 \omega_\alpha}{\partial x_j \partial x_\ell} \right)}_{\text{záměnnost parc. derivací}} dx_\ell \wedge dx_j \wedge dx_\alpha = 0$$

Def. forma $\omega \in E^q(\sigma)$ se nazve

1. uzavřená, pokud $d\omega = 0$

2. exaktní, pokud $\exists \eta \in E^{q-1}(\sigma)$

Pozn. V 29.1. : exaktní $\Rightarrow$ uzavřená

$\Leftarrow$ jen někdy : za dodatečných předpokladů na σ (např. konvexní množ.)

analogie : $F: \Omega \to \mathbb{R}^2$; $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ oblast

F má potenciál v Ω $(\exists U ; \nabla U = F)$

$\Rightarrow$ rot $F = 0$ v Ω

$\Leftarrow$ jen za předp. Ω jednoduše souvislá

Věta 29.2. [Gradované Leibnizovo pravidlo]

Nechť $\omega \in E^q(\sigma)$, $\eta \in E^l(\sigma)$ jsou q resp. l formy

Potom $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^q \omega \wedge d\eta$

dk. $\omega = \sum_\alpha \omega_\alpha dx_\alpha \qquad \eta = \sum_\beta \eta_\beta dx_\beta$

$$\omega \wedge \eta = \underbrace{\cancel{\sum_{\alpha,\beta}}}_{\text{BÚNO}} \omega_\alpha \eta_\beta \, dx_\alpha \wedge dx_\beta$$

$$d(\omega \wedge \eta) = d(\omega_\alpha \eta_\beta)\, dx_\alpha \wedge dx_\beta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(\omega_\alpha \eta_\beta) \overset{dx_j \wedge}{\cancel{d}x_\alpha} \wedge dx_\beta =$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_j} \eta_\beta + \omega_\alpha \frac{\partial \eta_\beta}{\partial x_j} \right) dx_j \wedge (dx_\alpha \wedge dx_\beta) =$$

člen z prohození dx_j vedle dx_β

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_\alpha}_{d\omega} \wedge \underbrace{\eta_\beta \, dx_\beta}_{\eta} + (-1)^q \underbrace{\omega_\alpha dx_\alpha}_{\omega} \wedge \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \eta_\beta}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_\beta}_{d\eta}$$

Def.: [Přenesení formy („pullback")]

$\Omega \subset \mathbb{R}^l$ otevř.; $\phi: \Omega \to \mathbb{R}^n \dots C^\infty$ funkce

Nechť $\omega \in E^l(\sigma)$; $\phi(\Omega) \subset \sigma$; $\omega = \sum_{\alpha \in \underline{I}(l,n)} \omega_\alpha \, dx_\alpha$

$$dx_\alpha = dx_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx_{\alpha_l}$$

Pak definujeme $\phi^*(\omega) \in E^l(\Omega)$ takto:

$$\phi^*(\omega) := \sum_{\alpha \in \underline{I}(l,n)} (\omega_\alpha \circ \phi) \, d\phi_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{\alpha_l}$$

kde $\phi = (\phi_1(x_1, \dots, x_l), \dots, \phi_n(x_1, \dots, x_l))$

Příkl: ① $\omega = f(x,y) \, dx \wedge dy$

$$\phi: (r,u) \to (\underbrace{r\cos u}_{x}, \underbrace{r \sin u}_{y})$$

$$\phi^*(\omega) = f(r\cos u, r\sin u) \underbrace{d(r\cos u)}_{\cos u \, dr - (\sin u) r \, du} \wedge \underbrace{d(r \sin u)}_{\sin u \, dr + r\cos u \, du} =$$

$$\overset{J\phi}{=} \boxed{r} \, dr \wedge du$$

② $\omega = F_1 \, dx + F_2 \, dy + F_3 \, dz$; $F_i = F_i(x,y,z)$

tj. $\omega \in E^1(\mathbb{R}^3)$

$\tilde{\varphi}: (a,b) \to \mathbb{R}^3$; $\tilde{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$

$\varphi_i = \varphi_i(t)$

$\varphi^*(\omega) = (F_1 \circ \varphi) \, d\varphi_1 + (F_2 \circ \varphi) \, d\varphi_2 + (F_3 \circ \varphi) \, d\varphi_3 =$

$\{d\varphi_i(t) = \varphi_i'(t) \, dt\}$

$= (\tilde{F} \circ \varphi) \cdot \tilde{\varphi}' \, dt$

Věta 29.3. [Vlastnosti přenášení formy]

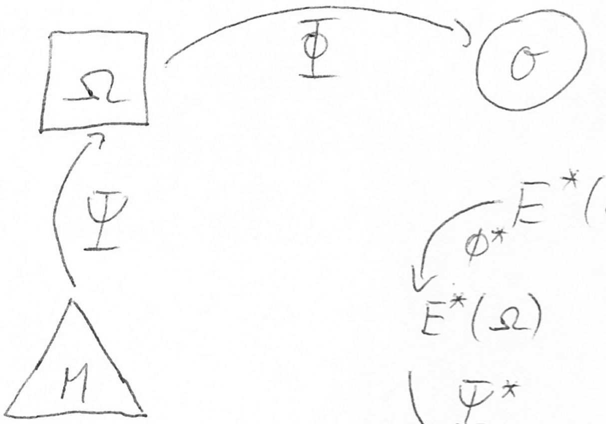
Nechť $\omega, \eta \in E^*(O)$ jsou libovolné formy

nechť $\Phi : \Omega \to O$, $\Psi : M \to \Omega$, kde $O \subset \mathbb{R}^n$,

$\Omega \subset \mathbb{R}^\ell$, $M \subset \mathbb{R}^s$ jsou otevřené

Potom

1. $\Phi^*(\omega + \eta) = \Phi^*(\omega) + \Phi^*(\eta)$
2. $\Phi^*(\omega \wedge \eta) = \Phi^*(\omega) \wedge \Phi^*(\eta)$
3. $\Psi^*(\Phi(\omega)) = (\Phi \circ \Psi)^*(\omega)$
4. $\Phi^*(d\omega) = d(\Phi^*(\omega))$



$$\begin{tikzcd} E^*(O) \arrow[d, bend right, "\phi^*"'] \\ E^*(\Omega) \arrow[d, bend right, "\Psi^*"'] \\ E^*(M) \end{tikzcd}$$

dk. 1,2 – d. cv.

3 – bez důkazu

4. BÚNO $\omega = \omega_\alpha \, dx_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx_{\alpha_\ell}$

$$\phi = (\phi_1(u_1, \dots, u_\ell), \dots, \phi_n(u_1, \dots, u_\ell))$$

$$\phi^*(d\omega) = \phi^*\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx_{\alpha_\ell} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_j} \circ \phi \; d\phi_j \wedge d\phi_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{\alpha_\ell} = LS$$

PS : $d\phi^*(\omega) = d\{\underbrace{(\omega_\alpha \circ \phi)}_{0\text{-forma}} \wedge \, d\phi_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge d\phi_{\alpha_\ell}\} =$

0-forma $\wedge$ ℓ-forma

Leibniz V 29.2.

$$= \underbrace{d(\omega_\alpha \circ \phi)} \wedge d\phi_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge d\phi_{\alpha_\ell} + (-1)^0 \omega_\alpha \circ \phi \, \overbrace{d\{d\phi_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge d\phi_{\alpha_\ell}\}}^{=0 \; *)}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(\omega_\alpha \circ \phi)} \, du_i = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_j} \circ \phi) \frac{\partial \phi_j}{\partial u_i} \cdot du_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_j} \circ \phi \, d\phi_j$$

to je i v LS

*) Leibniz $= d(d\phi_{\alpha_1}) \wedge d\phi_{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge d\phi_\ell$

$$(-1)^\ell d\phi_{\alpha_1} \wedge \underbrace{d(d\phi_{\alpha_2})}_{\equiv 0} \wedge \cdots$$

$\equiv 0$ V.29.1.

Lemma 29.2 $\omega \in E^k(O)$, $O \subset \mathbb{R}^k$ otevř., neboli ω má tvar $f \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ („pseudoskalár")

Dále : $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ otevř. ; $\phi : \Omega \to O$ je C^1

Potom $\phi^*(\omega) = (f \circ \phi) \, J\phi \; du_1 \wedge \cdots \wedge du_k$

kde $(x_1, \dots, x_k) \in O$; $(u_1, \dots, u_k) \in \Omega$

dk. : $\phi = (\phi_1(u_1, \dots, u_k), \dots, \phi_k(u_1, \dots, u_k))$

$\phi^*(\omega) = f \circ \phi \, d\phi_1 \wedge \cdots \wedge d\phi_k$

$$d\varphi_j = \sum_{\ell=1}^{k} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_\ell} du_\ell$$

L.29.1. : $d\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d\varphi_k = \overbrace{\det \left\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial x_\ell} \right\}_{j,\ell}}^{J\phi} du_1 \wedge \cdots \wedge du_k$

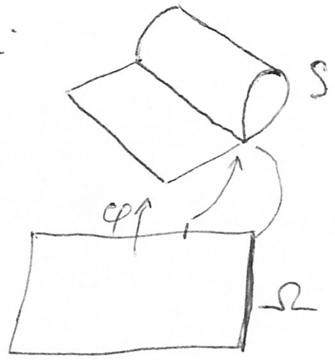
Def.: $S \subset \mathbb{R}^n$ se nazve jednoduchá k-plocha (připouštíme $1 \le k \le n$), jestliže $S = \varphi(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ je oblast (otevř., souvislá), a $\varphi: \Omega \to S$ splní

(i) φ je C^1, prosté

(ii) $\varphi_{-1}: S \to \Omega$ je spojité

(iii) $h(\nabla\varphi) = k$ všude v Ω

Pozn. bod (ii) zakazuje situaci



Dvojice (φ, Ω) se nazývá parametrizace S.

Def.: $S \subset \mathbb{R}^n$ je jednoduchá k-plocha, $f: S \to \mathbb{R}$

Integrál 1. druhu fce f přes S definujeme jako

$$\int_S f \, dS_k := \int_\Omega f \circ \varphi \sqrt{\det(\nabla\varphi^T \nabla\varphi)} \, d\lambda_k$$

kde integrál vpravo chápu jako Lebesgueův a (φ, Ω) je libovolná parametrizace S.

Pozn.: ① $k = 1$ $\quad \varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \quad (\nabla\varphi)^T \nabla\varphi = (\varphi_1', \dots, \varphi_n') \begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \vdots \\ \varphi_n' \end{pmatrix} = \|\varphi'\|^2$

... křivkový integrál

② $k = n \quad \det((\nabla\varphi)^T \nabla\varphi) = \det(\nabla\varphi)^T \cdot \det \nabla\varphi = (J\varphi)^2$

$dS_n = |J\varphi| \, d\lambda_n$ ... věta o substituci

③ $k = 2$, $n = 3$ (kap. 20)

d.co. $((\nabla\varphi)^T \nabla\varphi) = g$ „grammův determinant"

Věta 20.3: $dS_2 = \sqrt{g} \, d\lambda_2$

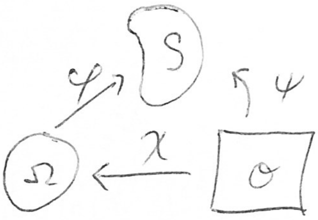
? korektnost definice (nezávislost na parametrizaci)

$(\varphi(u), \Omega)$, $(\psi(v), O)$ ... parametrizace S

definuji: $\chi : O \to \Omega$; $\chi := \varphi^{-1} \circ \psi$ $\quad (\varphi \circ \chi = \psi)$

klíčový bod: χ je difeomorfismus

(prosté, na, C^1, $J\chi \neq 0$)



$$\int_S f \, dS_k \overset{\text{pomocí } \varphi}{=} \int_\Omega f \circ \varphi \sqrt{\det((\nabla\varphi)^T \nabla\varphi)} \, d\lambda_k \quad \Big| \ \overset{\text{subst}}{\chi}$$

$$= \int_O \underbrace{(f\circ\varphi)\circ\chi}_{f\circ\psi} \underbrace{\sqrt{\det((\nabla\varphi)^T\nabla\varphi)\circ\chi \, |J\chi|}}_{\sqrt{\det(\nabla\psi)^T\nabla\psi}} \, d\lambda_k \overset{\#}{=} \int f \, dS_k$$

maticové násobení

pomocný výpočet: $(\nabla\psi)^T \nabla\psi = ((\nabla\varphi)\circ\chi \, \nabla\chi)^T (\nabla\varphi)\circ\chi \, \nabla\chi$

$$= (\nabla\chi)^T \underbrace{((\nabla\varphi)\circ\chi)^T (\nabla\varphi)\circ\chi}_{((\nabla\varphi)^T\nabla\varphi)\circ\chi} \nabla\chi$$

$$\det(\nabla\psi)^T\nabla\psi = \det((\nabla\varphi)^T\nabla\varphi)\circ\chi \, |J\chi|^2$$

\# Dodatek: k-rozměrnou míru plochy S definujeme

$$\sigma_k(S) := \int_S 1 \, dS_k = \int_\Omega \sqrt{\det((\nabla\varphi)^T\nabla\varphi)} \, d\lambda_k$$

Lemma 29.3. Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$; $k \in \{1, \dots, n\}$

nechť $v^j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, k$ jsou její sloupce.

Nechť $R(v_1, \dots, v_k)$ je rovnoběžnostěn, určený těmito vektory.

Potom $\sigma_k(R(v_1, \dots, v_k)) = \sqrt{\det A^T A}$

Dk. $A^T A = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 & \dots & v^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v^1, v^1 \rangle, & \langle v^1, v^2 \rangle, & \dots \end{pmatrix} =$

$$= \{\langle v^i, v^j \rangle\}_{i,j=1}^k$$

1. případ : navíc $\{v^i\}$ OG : LS : $\|v^1\| \cdots \|v^k\|$

PS : $A^TA = \begin{pmatrix} \langle v^1, v^1 \rangle & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \langle v^k, v^k \rangle \end{pmatrix}$

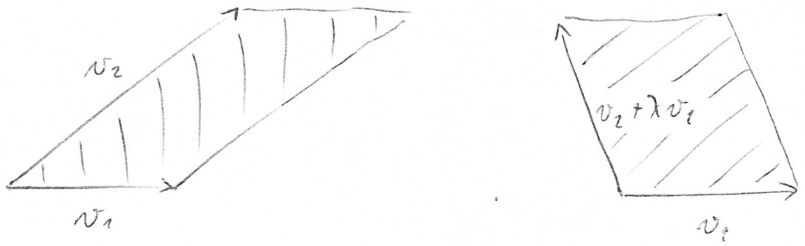
... det $\rightarrow \|v^1\|^2 \cdots \|v^k\|^2$ ... závěr platí

2. případ : obecné $\{v^i\}$ převedu na OG situaci operacemi

v^j nahradí $v^j + \lambda v^i$

(nemění LS ani PS)

LS :



podstava × výška

$$PS : A^TA = \begin{pmatrix} \langle v^1, v^1 \rangle, & \langle v^1, v^2 \rangle \\ \langle v^2, v^1 \rangle, & \langle v^2, v^2 \rangle \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \langle v^1, v^1 \rangle, & \langle v^1, v^2 + \lambda v^1 \rangle \\ \langle v^2, v^1 \rangle, & \langle v^2, v^2 + \lambda v^1 \rangle \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \langle v^1, v^1 \rangle, & \langle v^1, v^2 + \lambda v^1 \rangle \\ \langle v^2 + \lambda v^1, v^1 \rangle, & \langle v^2 + \lambda v^1, v^2 + \lambda v^1 \rangle \end{pmatrix}$$

determinant se nemění

Orientace (pomocná úvaha)

$S \subset \mathbb{R}^n$ ... jednoduchá k-plocha

$(\varphi, \Omega), (\psi, \Theta)$ ... parametrizace

$\Rightarrow \psi = \varphi \circ \chi$; $\chi : \Omega \rightarrow \Theta$ je difeomorfismus

$J\chi \neq 0$ v Ω

Ω souvislá $\Rightarrow$ buď (i) $J\chi > 0$

(ii) $J\chi < 0$ v Ω

Terminologie : $(\varphi, \Omega), (\psi, \Theta)$ vyjadřují stejnou resp. opačnou orientaci

Def.: Jednoduchá k-plocha S je orientovaná, je-li zvolena jedna ze dvou tříd shodných parametrizací, které prohlásím za parametrizace ve shodě s orientací

Def. [Integrál z formy]

1. $\omega \in E^k(\Omega)$; $\Omega \subset \mathbb{R}^k$; tj. $\omega = f\, du_1 \wedge \dots \wedge du_k$

$$\int_\Omega \omega := \int_\Omega f\, d\lambda_k$$

2. $S \subset \mathbb{R}^n$ je jednoduchá, orientovaná k-plocha, $\omega \in E^k(O)$; kde $O \supset S$ je otev.

$$\int_S \omega := \int_\Omega \varphi^*(\omega)$$

; kde (φ, Ω) je libovolná parametrizace ve shodě s orientací S

Pozn.: $\varphi: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$

$\varphi^*(\omega) \in E^k(\Omega)$; $\Omega \subset \mathbb{R}^k$

↳ pseudoskalár

$\int_\Omega \varphi^*(\omega)$ definováno v bodě 1.

? korektnost

$$\begin{tikzcd} & S & \\ \Omega_1 \in \mathcal{U} \arrow[ur, "\varphi"] & & \Omega_2 \in \mathcal{U} \arrow[ul, "\psi"'] \arrow[ll, bend left, "\delta"] \end{tikzcd}$$

δ... difeomorf.

$$\int_{\Omega_2} \psi^*(\omega) = \int_{\Omega_2} \delta^*(\varphi^*(\omega)) = \int f \circ \delta\, J\delta\, dv_1 \wedge dv_k$$

nechť $\varphi^*(\omega) = f(u)\, du_1 \wedge \dots \wedge du_k$

L. 29.2. $\Rightarrow \delta^*(\varphi^*(\omega)) = f \circ \delta\, J\delta\, dv_1 \wedge \dots \wedge dv_k$

$$\overset{\text{Def 1}}{=} \pm \int_{\Omega_2} f \circ \delta\, |J\delta|\, d\lambda_k \underset{\substack{\text{věta o}\\ \text{substituci}}}{=\!=} \pm \int_{\Omega_1} f\, d\lambda_k \underset{\text{Def. 1}}{=\!=} \pm \int_{\Omega_1} \varphi^*(\omega)$$

$\pm$: φ, ψ shodné / opačné orientace

~~Def.:~~

Příkl.: $\omega \in E^2(\mathcal{O})$; $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$

tj. $\omega : \mathcal{O} \to T^2(\mathbb{R}^3) = \mathrm{Lin}\{dx\wedge dy, dy\wedge dz, dx\wedge dz\}$

$$\omega = G_1\, dy\wedge dz + \underbrace{G_2\, dz\wedge dx}_{-G_2\, dx\wedge dz} + G_3\, dx\wedge dy$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z}\right) dx\wedge dy\wedge dz$$

přenesení: $\varphi : \Omega \to \mathcal{O}$; $\overset{\in (u,v)}{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$

$$\varphi = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v))$$

$$\varphi^*(\omega) = (\underset{\sim}{G}\circ\varphi)\cdot(\partial_u\varphi \times \partial_v\varphi)$$

$$\varphi^*(G_1\, dy\wedge dz) = G_1\circ\varphi\ d\varphi_2\wedge d\varphi_3 = G_1\circ\varphi\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}dv\right)\wedge$$

$$\wedge\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}dv\right) =$$

$$= G_1\circ\varphi \underbrace{\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\frac{\partial\varphi_3}{\partial v} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\right)}_{1.\ \text{složka}\ \partial_u\varphi\times\partial_v\varphi} du\wedge dv$$

S je 2-plocha v $\mathbb{R}^3$ (kap. 20)

(φ, Ω) ... parametrisace

$$\int_S \omega = \int_S \underset{\sim}{G}\cdot d\underset{\sim}{S}$$

Def.: $S_i \subset \mathbb{R}^n$ ... jednoduché k-plochy; (φ_i, Ω_i) parametrisace
$i = 1, \dots, s$

Řetězcem (zobecněnou k-plochou) rozumíme (formální) sumu

$$C := \sum_{i=1}^{s} n_i\varphi_i \quad \text{kde } n_i = \pm 1$$

Je-li $\omega \in E^2(\mathcal{O})$; $\mathcal{O} \supset \bigcup_i S_i$ otevř., klademe

$$\int_C \omega := \sum_{i=1}^{s} n_i \int_{S_i} \omega = \sum_{i=1}^{s} n_i \int_{\Omega_i} \varphi_i^*(\omega)\, d\lambda_2$$

Pozn. Nepožadují S_i disjunktní

Def: Pro krychli $I = [0,1]^k$ definujeme $I_j \subset \mathbb{R}^{k-1}$ jako průmět do roviny $\{x_j = 0\}$.

Zobrazení $\varphi_{j,\alpha} : (y_1, \dots, y_{k-1}) \mapsto (y_1, \dots, \underbrace{\alpha}_{j\text{-tá pozice}}, \dots, y_{k-1})$

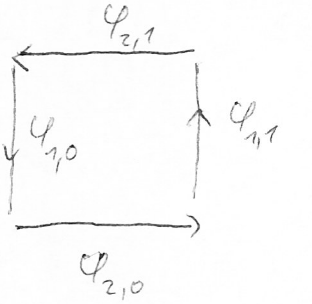
kde $1 \le j \le k$; $\alpha = 0,1$, parametrizují stěny I

Okrajem I rozumíme řetězec $\partial I := \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{j+\alpha} \varphi_{j,\alpha}$

Přík. $I = [0,1]^2$; $I_2 \subset \mathbb{R}$

$\varphi_{2,1} : t \mapsto (t, 1)$

$(-1)^{2+1} = -1$



Def: $S \subset \mathbb{R}^n$ se nazve k-dimenzionální singulární krychle, pokud $\exists$ parametrizace (φ, Ω); kde $\Omega = (0,1)^k$

Má-li φ vlastnosti parametrizace na jisté otevřené $\hat{\Omega} \supset [0,1]^k$, pak S se nazývá singulární krychle s okrajem. Okraj definujeme jako řetězec

$\partial S := \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{j+\alpha} \varphi \circ \underbrace{\varphi_{j,\alpha}}_{\text{hrany } I}$. Tento rozklad dává ∂S orientaci, kterou považuji za ~~složenou~~ sladěnou s orientací S, určenou φ

Věta 29.4. [Obecná Stokesova věta]

Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je k-dim. singulární krychle s okrajem ∂S. Nechť S, ∂S mají sladěné orientace (ve smyslu předchozí definice), nechť $\omega \in E^{k-1}(\mathcal{O})$, $\mathcal{O} \supset S$ otevřená

Potom
$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega$$

Pozn. Jde o zobecnění (mj.) těchto vět: Gaussova (V.19.5., V.20.1.)
Stokesova (V.20.5.)
Greenova (V.19.6.)

Příkl. $\omega = F \in E^0(\mathbb{R})$; $F = F(t)$

$S = [0,1]$

$d\omega = F'(t)\,dt \qquad \int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega$

$\partial S = \{0,1\}$

$$\int_0^1 F'(t)\,dt = -F(0) + F(1)$$

Příkl.: $\omega = \cos \pi y \; dx \wedge dz \quad ; \quad S = [0,1]^3$

$$\int_S d\omega \overset{?}{=} \int_{\partial S} \omega$$

$$d\omega = d(\cos \pi y) \wedge dx \wedge dz = -\pi \sin \pi y \; dy \wedge (dx \wedge dz) =$$
$$= \pi \sin \pi y \; dx \wedge dy \wedge dz$$

$$\int_S d\omega = \int_S \pi \sin \pi y \, d\lambda_3 = 1 \cdot \int_0^1 \pi \sin \pi y \, dy = \Big[-\cos \pi y\Big]_{y=0}^{1} = 2$$

$$\partial S = \sum_{j=1}^{3} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{j+\alpha} \varphi_{j,\alpha} \quad ; \quad \varphi_{j,\alpha} = \varphi_{j,\alpha}(u,v)$$

$$\int_{\partial S} \omega = \sum_{j,\alpha} (-1)^{j+\alpha} \int_{(u,v)\in[0,1]^2} \varphi_{j,\alpha}^{*}(\omega)$$

$$\varphi_{1,0} : (u,v) \mapsto (0,u,v)$$

$$\varphi_1^{*}(\omega) = 0 \quad ; \text{ neboť } \quad d0 = 0$$

$$\omega = \cos \pi y \; dx \wedge dz$$

jediné nenulové případy, kdy přenesení není $\equiv 0$!

$(+)$ $\varphi_{2,0} : (u,v) \mapsto (u,0,v)$

$(-)$ $\varphi_{2,1} : (u,v) \mapsto (u,1,v)$

$$\varphi_{2,0}^{*}(\omega) = \cos(\pi \cdot 0) \cdot du \wedge dv = du \wedge dv$$

$$\varphi_{2,1}^{*}(\omega) = \cos(\pi \cdot 1) \cdot du \wedge dv = - du \wedge dv$$

$$\int_{\partial S} \omega = \int_{(0,1)^2} \varphi_{2,0}^{*}(\omega) - \int_{(0,1)^2} \varphi_{2,1}^{*}(\omega) = 2 \int_{(0,1)^2} du \wedge dv = 2 \cdot \int_{(0,1)^2} d\lambda_2 = 2$$