1. TERMÍN – 18.1.2011

Používáte-li nějakou složitější větu, stručně však ověřte její předpoklady.
Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!
Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. [**10b**] Je dán systém rovnic

$$\begin{aligned} x' + \int_0^t x(s)y(t-s)ds &= 0, \qquad x(0) = 1, \\ y'' + 3y &= 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{aligned}$$

(a) Aplikujte „formálně“ Laplaceovu transformaci; vypočtěte $X(p) = \mathcal{L}x(t)$, $Y(p) = \mathcal{L}y(t)$.
(b) Určete Laplaceovy vzory $x(t)$, $y(t)$.
(c) Dokážete odůvodnit či jinak ověřit, proč jsou nalezené funkce $x(t)$, $y(t)$ řešením původní soustavy?

---

2. [**12b**] (a) Nalezněte inverzní Fourierovu transformaci regulární distribuce x_+, která je určena lokálně integrovatelnou funkcí

$$x_+ = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Dokážete výsledek napsat jako derivaci regulárních distribucí?
Nápověda: užijte známé vzorečky a také fakt, že $x_+ = xY(x)$, kde $Y(x)$ je Heavisideova funkce.
(b) Ve smyslu distribucí spočítejte

$$\frac{d^2}{dx^2}u + u,$$

kde

$$u(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in (0, \pi), \\ 0, & x \notin (0, \pi). \end{cases}$$

---

3. [**10b**] Je dána diferenciální forma

$$\omega = (x+z)dy \wedge dz + ydx$$

a zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ předpisem

$$\begin{aligned} x &= \cosh u \cosh v \\ y &= \cosh u \sinh v \\ z &= \sinh u \end{aligned}$$

Přímo z definice spočítejte postupně:
(a) $d\omega$
(b) $\Phi^*(\omega)$
(c) $d\big(\Phi^*(\omega)\big)$
(d) $\Phi^*(d\omega)$
Nápověda: $\cosh x' = \sinh x$, $\sinh x' = \cosh x$; mělo by vyjít (c) = (d) !

1. příklad (laplace) 10b:

(a) 4body
(b) 3body
(c) 3body

2. příklad (distribuce) 12b:

(a) 3b ... inverze Heavisidea
2b ... inverze derivace
2b ... integrace výsledku

(b) 2b ... první derivace
2b ... druhá derivace

3. příklad (forma) 10b:

(a) 2b
(b) 3b
(c) 3b
(d) 2b

(1) $x' + \int_0^t x(s)\,y(t-s)\,ds = 0; \quad x(0) = 1$

$y'' + 3y = 0; \quad y(0) = +1, \; y'(0) = 0.$

Laplace: $pX(p) + X(p)Y(p) = 1$

$p^2 Y(p) + 3Y(p) = p$

$$Y(p) = \frac{p}{p^2+3};$$

$$X(p) = \frac{1}{p + Y(p)} = \frac{p^2+3}{p^3+4p} = \frac{p}{4(p^2+4)} + \frac{3}{4p}$$

$y(t) = \cos\sqrt{3}t$

$x(t) = \frac{1}{4}\cos 2t + \frac{3}{4}$

Zkouška: $y'' = -\,\cdot 3\cos\sqrt{3}t = -3y$

$y(0) = 1 \quad ; \quad y' = -\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t\big|_{t=0} = 0.$

$x' = -\frac{1}{2}\sin 2t;$

$x(0) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$

$$x * y = \int_0^t \left(\frac{1}{4}\cos 2s + \frac{3}{4}\right)\cdot \cos\sqrt{3}(t-s)\,ds$$

$$= \int_0^t \frac{1}{4}\cos 2s \cdot \cos\sqrt{3}(t-s) + \frac{3}{4}\cos\sqrt{3}(t-s)\,ds$$

Wzór: $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a+b) + \cos(a-b)\}$.

$$\cos 2s \cos\sqrt{3}(t-s) = \frac{1}{2}\Big\{\cos\big(\sqrt{3}t + (2-\sqrt{3})s\big) + \cos\big((2+\sqrt{3})s - \sqrt{3}t\big)\Big\}.$$

$$x * y = \int_0^t \frac{1}{8}\cos\big(\sqrt{3}t + (2-\sqrt{3})s\big) + \frac{1}{8}\cos\big((2+\sqrt{3})s - \sqrt{3}t\big) + \frac{3}{4}\cos\sqrt{3}(t-s)\, ds$$

$$= \Big[\frac{+1}{8(2-\sqrt{3})}\sin\big(\sqrt{3}t + (2-\sqrt{3})s\big) + \frac{1}{8(2+\sqrt{3})}\sin\big((2+\sqrt{3})s - \sqrt{3}t\big) - \frac{\sqrt{3}}{4}\sin\sqrt{3}(t-s)\Big]_0^t$$

$$= -\frac{1}{8(2-\sqrt{3})}\big(\sin 2t - \sin\sqrt{3}t\big) - \frac{1}{8(2+\sqrt{3})}\big(\sin 2t + \sin\sqrt{3}t\big) - \frac{\sqrt{3}}{4}\sin\sqrt{3}t$$

$$= +\frac{1}{8}\underbrace{\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)}_{4}\sin 2t - \frac{1}{8}\underbrace{\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}} - \frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)}_{2\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t + \frac{\sqrt{3}}{4}\sin\sqrt{3}t = -\frac{1}{2}\sin 2t.$$

$$x' = -\frac{1}{2}\sin 2t$$

(2) (a) $\mathcal{F}_{-1}T = ?$; $T = x\,Y(x)$.

známe vzorečky: $\mathcal{F}\left(\text{v.p.}\,\frac{1}{x}\right) = -i\pi\,\mathrm{sgn}(x)$

$$\text{v.p.}\,\frac{-1}{i\pi x} \xmapsto{\mathcal{F}} \mathrm{sgn}\,\xi$$

$$\delta_0 \xmapsto{\mathcal{F}} 1$$

$$\frac{1}{2}\delta_0 - \frac{1}{2\pi i x} \xmapsto{\mathcal{F}} Y(\xi)$$

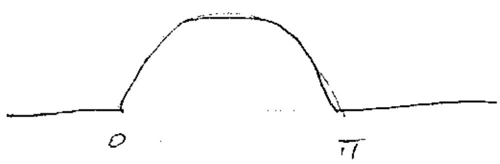
dále užijeme vzorec: $\frac{d}{dx}T \xmapsto{\mathcal{F}} 2\pi i\xi\,\hat{T}(\xi)$

$$\frac{d}{dx}\,\frac{T}{2\pi i} \longmapsto \xi\,\hat{T}(\xi)$$

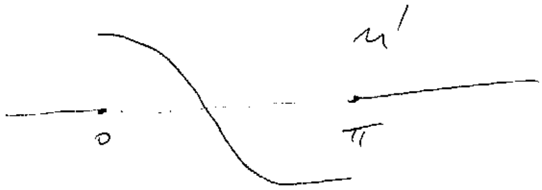
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4\pi i}\delta_0 + \frac{1}{4\pi^2}\,\text{v.p.}\,\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \xi\,Y(\xi)$$

$$= \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{4\pi i}Y(x) + \frac{1}{4\pi^2}\ln|x|\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \xi\,Y(\xi).$$

(b) $\frac{d}{dx}u(t) = \cos x$; $x \in (0,\pi)$
0 jinde



$\frac{d^2}{dx^2}u(t) = -\sin x$; $x \in (0,\pi)$
0 jinde



$+\,\delta_0 - \delta_\pi$.

celkem: $\boxed{\delta_0 - \delta_\pi.}$

③ $\omega = (x+z)\,dy\wedge dz + y\,dx$

$$\phi: \begin{aligned} x &= \cosh u \cosh v \\ y &= \cosh u \sinh v \\ z &= \sinh u \end{aligned}$$

$$d\omega = (dx + dz)\wedge dy\wedge dz + dy\wedge dx$$

$$= dx\wedge dy\wedge dz - dx\wedge dy.$$

$$dx = \sinh u \cosh v \, du + \cosh u \sinh v \, dv$$

$$dy = \sinh u \sinh v \, du + \cosh u \cosh v \, dv$$

$$dz = \cosh u \, du$$

$$\phi^*(\omega) = (\cosh u \cosh v + \sinh u)\cdot$$

$$\cdot (\sinh u \sinh v \, du + \cosh u \cosh v \, dv)\wedge (\cosh u)\, du$$

$$+ (\cosh u \sinh v)(\sinh u \cosh v \, du + \cosh u \sinh v \, dv)$$

$$= -(\cosh u \cosh v + \sinh u)\cosh^2 u \cosh v \, du\wedge dv$$

$$+ \cosh u \sinh u \cosh v \sinh v \, du$$

$$+ \cosh^2 u \sinh^2 v \, dv.$$

$$= \eta_{12}\, du\wedge dv + \eta_1\, du + \eta_2\, dv$$

$d\phi^*(\omega) = ?$

$$d(\eta_{12}\, du \wedge dv) = \frac{\partial \eta_{12}}{\partial u}\, du \wedge (du \wedge dv) + \frac{\partial \eta_{12}}{\partial v}\, dv \wedge (du \wedge dv)$$

$$= 0.$$

$$d(\eta_1\, du) = -\frac{\partial \eta_1}{\partial v}\, du \wedge dv$$

$$= -\cosh u \sinh u\, (\cosh^2 v + \sinh^2 v)\, du \wedge dv$$

$$d(\eta_2\, dv) = \frac{\partial \eta_2}{\partial u}\, du \wedge dv = 2\cosh u \sinh u \sinh^2 v\, du \wedge dv.$$

celkem: $d\phi^*(\omega) = \cosh u \sinh u\, (\sinh^2 v - \cosh^2 v)\, du \wedge dv.$

$$\phi^*(d\omega) = \underbrace{\phi^*(dx \wedge dy \wedge dz)}_{\substack{=0;\ \text{neboť v } \mathbb{R}^2 \nexists \text{ 3-vektory.}}} - \phi^*(dx \wedge dy)$$

$$\phi^*(dx \wedge dy) = \det M\, du \wedge dv,$$

$$M = \begin{pmatrix} \sinh u \cosh v, & \cosh u \sinh v \\ \sinh u \sinh v, & \cosh u \cosh v \end{pmatrix}$$

$$\det M = \sinh u \cosh u\, (\cosh^2 v - \sinh^2 v).$$

O.K.