2. TERMÍN – 25.1.2011

Používáte-li nějakou složitější větu, stručně však ověřte její předpoklady.
Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!
Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. [**10b**] Je dán systém rovnic (pro $t > 0$)

$$x''' - y''' = 1,$$
$$x' + y' = \exp t,$$

s počátečními podmínkami (kde a, $b \in \mathbb{R}$)

$$x(0) = a, \quad y(0) = b,$$
$$x'(0) = y'(0),$$
$$x''(0) = y''(0) = 0.$$

(a) Odvoďte formálně rovnice pro $X(p) = \mathcal{L}x(t)$, $Y(p) = \mathcal{L}y(t)$.
(b) Spočtěte $X(p)$, $Y(p)$ a určete Laplaceovy vzory $x(t)$, $y(t)$.
(c) Jsou nalezené funkce $x(t)$, $y(t)$ řešením původní soustavy?

---

2. [**12b**] Je dána rovnice ($x \in \mathbb{R}$)

$$-u'' + a^2 u = \delta_0$$

(a) Odvoďte formálně rovnici pro $\hat{u}$.
(b) Spočítejte odtud u *(Nápověda:* $\mathcal{F}(1/(1+x^2)) = \pi \exp(-2\pi|\xi|)$.*)*
(c) Spočítejte (přímo z definice) distributivní derivace u', u''.
(d) Spočítejte $\lim_{a\to 0+} u$ ve smyslu distribucí.

---

3. [**10b**] Je dána diferenciální forma (v $\mathbb{R}^3$ mimo počátek)

$$\omega = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\big(x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy\big)$$

a zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ předpisem

$$x = \cos u \cos v$$
$$y = \sin u \cos v$$
$$z = \sin v$$

Přímo z definice spočítejte postupně:
(a) $d\omega$
(b) $\Phi^*(\omega)$
(c) $d\big(\Phi^*(\omega)\big)$
(d) $\Phi^*(d\omega)$

(1) $x''' - y''' = 1$ $\quad x(0) = a, \; y(0) = b$

$x' + y' = e^t$ $\quad x'(0) = y'(0) = 0$

$x''(0) = y''(0) = 0.$

$X = \mathcal{L}\{x\}; \; Y = \mathcal{L}\{y\}:$

$$p^3 X(p) - p^3 Y(p) = \frac{1}{p} + x''(0) + p x'(0) + p^2 x(0)$$

$$- y''(0) - p y'(0) - p^2 y(0)$$

$$= \frac{1}{p} + p^2(a-b)$$

2. rce: $pX(p) + pY(p) = \frac{1}{p-1} + a+b$

---

celkem: systém $\quad X(p) - Y(p) = \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p}(a-b)$

$$X(p) + Y(p) = \frac{1}{p(p-1)} + \frac{a+b}{p}.$$

---

odkud: $\quad X(p) = \frac{1}{2p^4} + \frac{1}{2p(p-1)} + \frac{a}{p}$

$$Y(p) = -\frac{1}{2p^4} + \frac{1}{2p(p-1)} + \frac{b}{p}.$$

inverze:
$$\frac{1}{p(p-1)} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \;;$$

víme:
$$1 \xmapsto{\mathcal{L}} \frac{1}{p}$$
$$t^3 \longmapsto \frac{6}{p^4} \;;$$
$$e^t \longmapsto \frac{1}{p-1}$$

$$x(t) = \frac{t^3}{12} + \frac{1}{2}e^t + a - \frac{1}{2}$$
$$y(t) = -\frac{t^3}{12} + \frac{1}{2}e^t + b - \frac{1}{2}$$

Je to řešení?

$$x' = \frac{t^2}{4} + \frac{1}{2}e^t$$
$$x'' = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}e^t$$
$$x''' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^t$$

$$y' = -\frac{t^2}{4} + \frac{1}{2}e^t$$
$$y'' = -\frac{t}{2} + \frac{1}{2}e^t$$
$$y''' = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^t$$

[Problém nemá řešení (což plyne také z derivace 2. rce v bodě $t=0$)]

1. rce: O.K

2. rce: O.K.

poč. podm.: $x(0)=a$, $y(0)=b$ O.K.

$x'(0)=y'(0)$ O.K.

$x''(0)=y''(0) \neq 0$. SPOR

(2) $-u'' + a^2 u = \delta_0$.

$$\left(4\pi^2 \xi^2 + a^2\right) \hat{u}(\xi) = 1$$

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{4\pi^2 \xi^2 + a^2}.$$

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i \xi x}}{4\pi^2 \xi^2 + a^2} \, d\xi = \mathcal{F}_{-1}\left(\frac{1}{4\pi^2 \xi^2 + a^2}\right).$$

víme: $\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \pi e^{-2\pi|\xi|}$.

sudé fce: $\mathcal{F}_{-1} = \mathcal{F}$; tedy

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi\xi)^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{a}\xi\right)^2 + 1};$$

$$\mathcal{F}(f(cx)) = \frac{1}{c} \hat{f}(\xi/c). \quad ; \quad c = \frac{2\pi}{a}$$

tedy:

$$u(x) = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\pi}{2\pi} \cdot e^{-2\pi\left|\frac{x}{2\pi/a}\right|}$$

$$= \frac{1}{2a} e^{-a|x|}.$$

$$u' = -\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(x)\cdot e^{-a|x|}\,;$$

$$u'' = \frac{1}{2}a\,e^{-a|x|} - \delta_0\,.$$

---

limity:
$$\lim_{a\to 0+} e^{-a|x|} \to 1 \quad \text{v } \mathcal{D}'(\mathbb{R});$$

ale: $\frac{1}{a}e^{-|ax|}$ ~~x~~ nemá limitu...

$$\langle e^{-a|x|}, \varphi(x)\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-a|x|}\varphi(x)\,dx \to \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx$$

$$= \langle 1, \varphi(x)\rangle.$$

(3)

$$\omega = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \left(x \, dy\wedge dz + y \, dz\wedge dx + z \, dx\wedge dy \right).$$

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$

$$d\omega = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} \, dx\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{r^3} \, dy\wedge dz\wedge dx$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{r^3} \, dz\wedge dx\wedge dy$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{r^3} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{r^3} \right) dx\wedge dy\wedge dz = 0.$$

---

aside: $\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} = \frac{1}{r^3} - 3 \frac{x^2}{r^5}$; relat $\frac{\partial}{\partial x} r = \frac{x}{r}$

ϕ : $x = \cos u \cos v$

$y = \sin u \cos v$

$z = \sin v$

$dx = -\sin u \cos v \, du - \cos u \sin v \, dv$

$dy = \cos u \cos v \, du - \sin u \sin v \, dv$

$dz = \cos v \, dv$

$dy\wedge dz = \cos u \cos^2 v \, du\wedge dv$

$dz\wedge dx = \sin u \cos^2 v \, du\wedge dv$

$dx\wedge dy = \cos v \sin v \, du\wedge dv$

$$\cancel{\phi^*(\omega)} = \quad r^2 = \underbrace{\cos^2 v \cos^2 u + \cos^2 v \sin^2 u}_{\cos^2 v} + \sin^2 v = 1.$$

$$\phi^*(\omega) = \cos u \cos v \cdot \cos u \cos^2 v \quad du \wedge dv$$

$$+ \sin u \cos v \cdot \sin u \cos^2 v \quad du \wedge dv$$

$$+ \sin v \cdot \cos v \sin v \quad du \wedge dv$$

$$= \Big(\underbrace{\cos^2 u \cos^3 v + \sin^2 u \cos^3 v}_{\cos^3 v} + \sin^2 v \cos v \Big) \, du \wedge dv$$

$$= \cos v \left(\cos^2 v + \sin^2 v \right) du \wedge dv$$

$$= \cos v \quad du \wedge dv.$$