3. TERMÍN – 28.1.2014

Používáte-li nějakou složitější větu, stručně však ověřte její předpoklady.
Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!
Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. [11b] Jsou dány rovnice

$$\int_0^t \{x(t-s)+\sin(t-s)\}x(s)ds + \cos t = 1 + \int_0^t x(s)ds$$

$$\int_0^t y(t-s)x(s)ds + t^m = 0$$

pro neznámé funkce $x(t)$, $y(t)$, kde $t > 0$ a $m \geq 0$ je celočíselný parametr.
(a) Odvoďte soustavu pro $X(p) = \mathcal{L}x(t)$, $Y(p) = \mathcal{L}y(t)$ a vyjádřete je.
(b) Určete nejmenší hodnotu m takovou, aby původní soustava měla řešení ve třídě $x(t)$, $y(t) \in L^1_+$. Volbu m podrobně odůvodněte.
(c) Pro výše zjištěné m tato řešení vypočtěte a ověřte dosazením nebo jiným typem úvahy, že se skutečně jedná o řešení.

Naleznete-li více dvojic řešení, stačí ověřit jednu z nich.

---

2. [12b] Nalezněte fundamentální řešení rovnice

$$\partial_t u + au + b\partial_x u - c^2\,\partial_{xx} u = 0$$

pro neznámou funkci $u = u(x)$ v $\mathbb{R}$, kde a, $b \in \mathbb{R}$, $c > 0$ jsou parametry. Podrobně:
(a) Aplikujte (formálně) Fourierovu transformaci, kde na pravé straně je $\delta_0(t)\delta_0(x)$.
(b) Vyřešte rovnici pro $\hat{u}$ pro každé ξ pevné.
(c) Nalezněte $u(x)$. Vyjděte z faktu, že $\mathcal{F}_{x\to\xi}\{\exp(-\pi x^2)\} = \exp(-\pi\xi^2)$ a použijte vlastnosti posunu a škálování $\mathcal{F}$.

---

3. [9b] Je dána 1-forma v $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tvaru

$$\omega = \frac{vdu}{u^2+v^2} - \frac{udv}{u^2+v^2}$$

Nechť Ψ je zobrazení $u = y - x$, $v = y + x$ a χ je zobrazení $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.
Vypočítejte postupně (pouze užitím definic):
(a) $\chi^*\Psi^*(d\omega)$
(b) $\chi^* d\Psi^*(\omega)$
(c) $d\chi^*\Psi^*(\omega)$

1. Příklad

transformace jednotlivých členů [3]

vyjádření X(p),Y(p) [4]

diskuse hodnoty m [2]

inverze a zkouška [2]

==

2. Příklad

transformace rce [3]

nalezení \hat{u} [4]

inverze [5]

==

3. Příklad

výpočet (a) [3]

výpočet (b) [3]

výpočet (c) [3]

(1) $$\left(X(p)+\frac{1}{p^2+1}\right)X(p)+\frac{p}{p^2+1}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p}X(p)$$

$$Y(p)X(p)+\frac{n!}{p^{n+1}}=0$$

1.rce: $$X^2+X\left(\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{p}\right)+\underbrace{\frac{p}{p^2+1}-\frac{1}{p}}_{=-\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p^2+1}}=0$$

$$\Rightarrow X_1=\frac{1}{p},\ X_2=\frac{-1}{p^2+1}$$

2.rce: $$Y=\frac{-n!}{p^{n+1}}\cdot\frac{1}{X}\ ;\ \text{tj. } Y_1=\frac{-n!}{p^{n}}$$

$$Y_2=-n!\left(\frac{1}{p^{n-1}}+\frac{1}{p^{n+1}}\right)$$

úvaha: $X, Y\in\mathcal{L}(L^1_+)\Rightarrow X, Y\to 0$, Re $p\to\infty$

$\Rightarrow (X_1, Y_1)$ vyhovuje pro $n=1$

zatímco Y_2 až pro $n=2$.

$$x_1=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)=\mathcal{Y}(t),\quad y_2=\mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{1}{p}\right)=-\mathcal{Y}(t)$$

---

zkouška: $$LS_1=\int_0^t(1+\sin(t-s))\,ds+\cos t=t+[+\cos(t-s)]_0^t+\cos t$$

$$=t+1-\cos t+\cos t=t+1$$

$$PS_1:\ 1+\int_0^t ds=1+t$$

$$LS_2:\ -\int_0^t 1\,ds+t=-t+t=0.$$

(2) $\partial_t u + au + b\,\partial_x u - c^2\partial_{xx} u = \delta_0(t)\,\delta_0(x)$: $\mathcal{F}_{x\to\xi}$

$$\partial_t \hat{u} + (a + 2\pi i \xi b + 4\pi^2\xi^2 c^2)\hat{u} = \delta_0(t)$$

Věta 28.1 : $\hat{u} = \hat{u}(\xi, t) = Y(t)\,y(t)$; kde $y(t)$ řeší

$K(\xi) = (a + 2\pi i \xi b + 4\pi^2\xi^2 c^2)$ $\qquad y' + K(\xi)y = 0$

$\qquad y(0) = 1$

$$\Rightarrow \hat{u}(\xi, t) = Y(t)\,e^{-tK(\xi)} = Y(t)\,e^{-at}\cdot e^{-2\pi i \xi b t}\cdot e^{-4\pi^2\xi^2 c^2 t}.$$

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\,\hat{u}(\xi,t) = Y(t)\,e^{-at}\,\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left\{e^{-2\pi i \xi b t}\cdot e^{-4\pi^2\xi^2 c^2 t}\right\}$$

$$= Y(t)\,e^{-at}\,\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-4\pi^2\xi^2c^2t}\right\}(x - bt)$$

---

konečně : $\mathcal{F}^{-1} : e^{-\pi\xi^2} \longrightarrow e^{-\pi x^2}$, odkud

$$e^{-4\pi^2\xi^2c^2t} = e^{-\pi(\underbrace{2\sqrt{\pi t}\,c}_{d}\,\xi)^2} \longrightarrow \frac{1}{d}\,e^{-\pi\left(\frac{x}{d}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}\,c}\,e^{-\pi\left(\frac{x}{2\sqrt{\pi t}\,c}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}\,c}\,e^{-\frac{x^2}{4tc^2}}$$

$$u(x,t) = Y(t)\,e^{-at}\,\frac{1}{\sqrt{4\pi t c^2}}\,e^{-\frac{(x-bt)^2}{4tc^2}}$$

3 $$dw = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v}{u^2+v^2}\right) dv\wedge du - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right) du\wedge dv$$

$$= \left\{ -\frac{1}{u^2+v^2} + \frac{2v^2}{(u^2+v^2)^2} - \frac{1}{u^2+v^2} + \frac{2u^2}{u^2+v^2} \right\} du\wedge dv$$

$$= 0 \quad ; \text{ tj. } \boxed{(a) : \tau^* \psi^* (dw) = 0}$$

$\psi^*(w)$:
$$du = dy - dx$$
$$dv = dy + dx$$

$$\psi^*(w) = \frac{(y+x)(dy-dx)}{(y-x)^2+(y+x)^2} - \frac{(y-x)(dy+dx)}{(y-x)^2+(y+x)^2} = \frac{1}{2(x^2+y^2)} \cdot B$$

$$B = \cancel{y\,dy} - y\,dx + x\,dy - \cancel{x\,dx} - (\cancel{y\,dy} + y\,dx - x\,dy - \cancel{x\,dx})$$

$$= -2y\,dx + 2x\,dy \; ; \text{ tj. } \psi^*(w) = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2},$$

tj. $d\psi^*(w) = 0$; analogicky jako (a); tj. $\boxed{(b) : 0}$

$\tau^*\psi^*(w)$:
$$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi$$
$$dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi$$

$$\tau^*\psi^*(w) = \frac{1}{r^2}\Big(-r\sin\varphi\,(\cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi)$$
$$+ r\cos\varphi\,(\sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi)\Big)$$

$$= \frac{1}{r^2} r^2 d\varphi = d\varphi .$$

$$\boxed{d(\tau^*\psi^*(w)) = d\,d\varphi = 0}$$