3. TERMÍN – 8.2.2011

Používáte-li nějakou složitější větu, stručně však ověřte její předpoklady.
Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!
Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. [**10b**] Je dána rovnice (pro $t > 0$)

$$x'' + \int_0^t \{x'(s) + 8x(s)\} \cosh(t-s)\, ds = 0,$$

s počátečními podmínkami

$$x(0) = 3, \qquad x'(0) = -8.$$

(a) Odvoďte rovnici pro $X(p) = \mathcal{L}x(t)$.
(b) Spočtěte $X(p)$ a určete Laplaceův vzor $x(t)$.

---

2. [**12b**] Nalezněte fundamentální řešení Schrödingerovy rovnice

$$i\partial_t u + \partial_{xx} u = 0.$$

Podrobněji: uvažujte na pravé straně Diracovu míru v bodě $(x,t) = (0,0)$. Odvoďte rovnici pro $\hat{u} = \mathcal{F}_x u$; vyřešte ji a proveďte zpětnou tranformaci přes ξ.
Považujte za známý fakt, že $\mathcal{F}\{\exp(-i\pi^2 x^2)\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(i(x^2 - \frac{\pi}{4}))$.

---

3. [**10b**] Je dána diferenciální forma v $\mathbb{R}^2$

$$\omega = (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2) dx \wedge dy.$$

Dále jsou dána zobrazení

$$\Phi: \qquad \begin{aligned} x &= r\cos u \\ y &= r \sin u \end{aligned}$$

a zobrazení

$$\Psi: \qquad \begin{aligned} r &= \exp(-t) \\ u &= t. \end{aligned}$$

Přímo z definice spočítejte postupně:
(a) $\Phi^*(\omega)$
(b) $\Psi^*(\Phi^*(\omega))$
(c) $(\Phi \circ \Psi)^*(\omega)$

(7) $x'' + \int_0^t \{x'(s) + 8x(s)\} \cosh(t-s)\, ds = 0$

$x(0) = 3$

$x'(0) = -8$

$X = \mathcal{L}\{x\}$.

$$x'' \xrightarrow{\mathcal{L}} p^2 X + 8 - 3p$$

$$x' \qquad pX - 3$$

$$\cosh t \qquad \frac{p}{p^2-1}$$

$$p^2 X + 8 - 3p + \{pX - 3 + 8X\} \cdot \frac{p}{p^2-1} = 0 \qquad / p^2-1$$

$$(p^4 - \cancel{p^2})X + (8-3p)(p^2-1) + \cancel{p^2 X} - 3p + \underline{8pX} = 0$$

$$(p^4 + 8p)X + 8p^2 - 8 - 3p^3 = 0$$

$$X = \frac{3p^3 - 8p^2 + 8}{p^4 + 8p} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{Cp + D}{p^2 - 2p + 4}$$

jmenovatel: $p^4 + 8p = p(p^3 + 8) = p(p+2)(p^2 - 2p + 4)$

$\sim$ výpočet: $A = 1$

$B = 2$

$C = 0$; $D = -4$

(1b)

$$X = \frac{1}{p} + \frac{2}{p+2} - \frac{4}{p^2-2p+4}$$

$\mathcal{L}^{-1}$:

$$\frac{1}{p} \longrightarrow 1$$

$$\frac{1}{p+2} \qquad e^{-2t}$$

$$\frac{1}{p^2-2p+4} = \frac{1}{(p-1)^2+3} \longrightarrow \frac{e^{t}\sin\sqrt{3}\,t}{\sqrt{3}}.$$

---

celkem: $x(t) = 1 + 2e^{-2t} - \frac{4}{\sqrt{3}}e^{t}\sin\sqrt{3}\,t.$

(2) $i\,\partial_t u + \partial_{xx} u = \delta_{(0,0)}(x,t)$; $\mathcal{F}_x$

$$i\,\partial_t \hat{u} - 4\pi^2\xi^2 \hat{u} = \delta_0(t)$$

$$\partial_t \hat{u} + 4\pi^2\xi^2 i \hat{u} = \frac{1}{i}\,\delta_0(t).$$

$$\hat{u} = \frac{1}{i}\, e^{-4\pi^2\xi^2 i t}\, Y(t).$$

---

inverse: víme $\mathcal{F}\{e^{-i\pi^2 x^2}\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{i(\xi^2 - \frac{\pi}{4})}$.

a tedy také: $\mathcal{F}_{-1}\{e^{-i\pi^2\xi^2}\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{i(x^2 - \frac{\pi}{4})}$

(sudé fce!!)

protože konečně:

$$\mathcal{F}_{-1}\{f(c\xi)\} = \frac{1}{c}\,\mathcal{F}_{-1}f\left(\frac{x}{c}\right)$$

máme při volbě: $c = 2\sqrt{t}$

$$u = \frac{Y(t)}{i}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\cdot e^{i\left(\frac{x^2}{4t} - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

③ $$\omega = (x^2-y^2)\,dx + (x^2+y^2)\,dx\wedge dy.$$

$$\phi:\quad x = r\cos u$$
$$\qquad y = r\sin u$$

$\phi^*(\omega) = ?$

$$dx = \cos u\,dr - r\sin u\,du$$
$$dy = \sin u\,dr + r\cos u\,du$$

$$dx\wedge dy = r\,dr\wedge du$$

$$\phi^*(\omega) = r^2\cos 2u\,(\cos u\,dr - r\sin u\,du)$$
$$+ r^3\,dr\wedge du$$

$$= r^2\cos 2u\cos u\,dr - r^3\cos 2u\sin u\,du + r^3\,dr\wedge du.$$

$$\psi:\quad r = e^{-t} \qquad dr = -e^{-t}\,dt$$
$$\qquad u = t \qquad du = dt$$

$$\psi^*(\phi^*(\omega)) = e^{-2t}\cos 2t\cos t\cdot(-e^{-t})\,dt$$
$$- e^{-3t}\cos 2t\sin t\,dt \quad + \quad 0$$
$$= -e^{-3t}\cdot\cos 2t\,(\cos t + \sin t)\,dt$$

(3f) $\phi \circ \psi$: $x = e^{-t} \cos t$

$$y = e^{-t} \sin t$$

$$dx = e^{-t}(-\cos t - \sin t)\,dt$$

$$dy = e^{-t}(-\sin t + \cos t)\,dt$$

$$(\phi \circ \psi)^*(\omega) = (e^{-2t}\cos^2 t - e^{-2t}\sin^2 t \cdot)\, e^{-t}(-\cos t - \sin t)\,dt$$

$$= -e^{-3t}\cos 2t \cdot (\cos t + \sin t)\,dt \,.$$