Příklad 1 Dokažte následující zobecnění Hölderovy nerovnosti:
(1a) Je-li

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1\,,$$

kde p, q, $r \in [1, \infty)$, pak

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q\,.$$

(1b) Je-li

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} = 1\,,$$

kde p, q, $s \in [1, \infty)$, pak

$$\int_\Omega |fgh|\,dx \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_s\,.$$

Příklad 2 Dokažte limitní přechod v konvektivním členu: jestliže

$$\begin{aligned} u^N &\to u \qquad \text{slabě v } L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)) \\ u^N &\to u \qquad \text{silně v } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \end{aligned}$$

pak pro libovolnou pevnou testovací funkci

$$\psi \in L^\infty(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$$

platí (značíme $Q = \Omega \times (0,T)$)

$$\int_Q u_j^N \frac{\partial u_i^N}{\partial x_j} \psi_i\,dxdt \to \int_Q u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \psi_i\,dxdt\,.$$

Nápověda:

1a – Hölder na součin $|f|^r \cdot |g|^r$ s exponenty $\delta = p/r$, $\delta' = q/r$.
2b – dle předchozího $fg \in L^r$, kde $r = s'$.
3 – trik: přičtu a odečtu $u_j \frac{\partial u_i^N}{\partial x_j} \psi_i$; v jednom členu užiju slabou konvergenci, tj.

$$\int_Q \left(\frac{\partial u_i^N}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \chi_{ij} \, dxdt \to 0$$

pro libovolnou pevnou funkci $\chi \in L^2(Q) = L^2(0, T; L^2(\Omega))$.
Druhý člen, tj.

$$\int_Q \left(u_j^N - u_j \right) \frac{\partial u_i^N}{\partial x_j} \psi_i \, dxdt$$

odhadnu Hölderem přes Ω a potom přes $(0, T)$, přičemž užiji mj. faktu, že

$$u^N \to u \qquad \text{silně v } L^2(0, T; L^4(\Omega))$$

což plyne (dokažte podrobně) z nerovnosti Ladyženské

$$\|v\|_4^2 \leq 2\|v\|_2 \|\nabla v\|_2 \, .$$