Je-li X normovaný (obecně metrický) prostor, definujeme fraktální dimenzi množiny $A \subset X$ jakožto

$$d_f^X(A) = \limsup_{\varepsilon \to 0+} \frac{\ln N_X(A, \varepsilon)}{-\ln \varepsilon},$$

kde $N_X(A, \varepsilon)$ je nejmenší počet uzavřených koulí o poloměru ε se středem v A, které pokrývají A.

Příklad 1 Nechť $\tilde{N}_X(A, \varepsilon)$ je nejmenší počet uzavřených množin o průměru nejvýše ε, pokrývajících A.
Ukažte, že fraktální dimenze množiny se nezmění, použijeme-li $\tilde{N}_X(A, \varepsilon)$ místo $N_X(A, \varepsilon)$.

Příklad 2 Dokažte základní vlastnosti fraktální dimenze:
(2a) Je-li $f : X \to Y$ Hölderovské s exponentem $a \in (0, 1]$, pak pro každou $A \subset X$

$$d_f^Y\big(f(A)\big) \le a^{-1} d_f^X(A).$$

(2b) Jsou-li $A \subset X$, $B \subset Y$, potom

$$d_f^{X \times Y}(A \times B) \le d_f^X(A) + d_f^Y(B).$$

(Normu v $X \times Y$ si zvolte libovolně.)

Příklad 3 Nechť $(S(t), B)$ je dynamický systém operátorů řešení Navier-Stokesových rovnic, kde B je omezená, uzavřená, pozitivně invariantní podmnožina prostoru H. Nechť $(L(t), B_\ell)$ je příslušný dynamický systém „trajektorií“, a máme definována zobrazení $e : B_\ell \to B$ a $b : B \to B_\ell$, viz přednáška 14.4. Množinu trajektorií B_ℓ uvažujeme s topologií

$$H_\ell = L^2(0, \ell; H).$$

(3a) Ukažte, že e, b a $L(t)$ jsou lipschitzovská zobrazení.
(3b) Ukažte, že je-li $\mathcal{A}_\ell$ globální atraktor pro $(L(t), B_\ell)$, pak

$$\mathcal{A} := e(\mathcal{A}_\ell)$$

je globální atraktor pro $(S(t), B)$; navíc platí

$$d_f^H(\mathcal{A}) = d_f^{H_\ell}(\mathcal{A}_\ell).$$

Nápověda:
(3a) jsou-li χ, $\psi \in B_\ell$, *pak z lipschitzovskosti operátoru řešení*

$$\|\chi(\ell) - \psi(\ell)\|_2^2 \leq K \, \|\chi(s) - \psi(s)\|_2^2 \, ;$$

integrujte vůči $s \in (0, \ell)$.