PROSTORY H^α A JEJICH APLIKACE V PDR.

0. Nechť $\mathcal{H}$ je prostor formálních řad $u = \sum_j c_j u_j$, kde $c_j \in \mathbb{R}$ a u_j jsou abstraktní bázové prvky. Na $\mathcal{H}$ lze vždy pohlížet jednoduše jako na posloupnosti $\{c_j\} \subset \mathbb{R}$; což se nevylučuje s tím, že upřesnění významu u_j povede k různých druhům konvergence.

1. Operátor. Definujeme operátor $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ podmínkou $Au_j = \lambda_j u_j$, tj. $A(\sum_j c_j u_j) = \sum_j \lambda_j c_j u_j$. Tedy λ_j jsou vlastní čísla a u_j příslušné vlastní funkce. Klíčovým parametrem celé teorie je chování λ_j. Budeme obecně předpokládat

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_j \to \infty, \qquad j \to \infty \tag{1}$$

Lze definovat obecnou mocninu A^β, $\beta \in \mathbb{R}$, předpisem $A^\beta(\sum_j c_j u_j) = \sum_j \lambda_j^\beta c_j u_j$. Zřejmě $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$, $A^0 = I$ a A^{-1} je inverzní operátor k A, to vše na prostoru $\mathcal{H}$ zatím bez topologie.

2. Prostory H^α. Nyní definujeme podprostory $H^\alpha \subset \mathcal{H}$, pro obecné $\alpha \in \mathbb{R}$, pomocí normy

$$\|u\|_{H^\alpha}^2 = \sum_j \lambda_j^\alpha c_j^2 \tag{2}$$

Snadno si rozmyslíme, že jde o úplné, dokonce Hilbertovy prostory se skalárním součinem

$$(u, \tilde{u})_{H^\alpha} = \sum_j \lambda_j^\alpha c_j \tilde{c}_j, \qquad u = \sum_j c_j u_j,\ \tilde{u} = \sum_j \tilde{c}_j u_j. \tag{3}$$

Také lze ukázat (viz d.ú. 6), že pro $\tilde{\alpha} > \alpha$ je $H^{\tilde{\alpha}}$ kompaktně a hustě vnořen do H^α. Platí odhad

$$\|u\|_{H^\alpha} \le \lambda_1^{\frac{\alpha-\tilde{\alpha}}{2}} \|u\|_{H^{\tilde{\alpha}}} \tag{4}$$

Všimněme si ještě, že u_j tvoří úplnou OG bázi H^α a $\|u_j\|_{H^\alpha} = \lambda_j^{\frac{\alpha}{2}}$. Dále se snadno ukáže, že $H^{-\alpha} = (H^\alpha)'$, s kanonickou dualitou

$$\langle u, \tilde{u} \rangle = \sum_j c_j \tilde{c}_j \tag{5}$$

kde $u \in H^\alpha$, $\tilde{u} \in H^{-\alpha}$ mají tvar jako v (3). Podrobněji řečeno: pro $\tilde{u} \in H^{-\alpha}$ pevné definuje výraz (5) spojitý lineární funkcionál na H^α, jehož norma je rovna $\|\tilde{u}\|_{H^{-\alpha}}$. Obráceně, každý prvek duálu $(H^\alpha)'$ lze takto reprezentovat.

3. Projekce. Máme přirozený rozklad $I = P_n + Q_n$, kde P_n, Q_n jsou projekce na podprostory generované $\{u_1, \dots, u_n\}$ respektive $\{u_{n+1}, \dots\}$. Snadno se spočte, že pro $\tilde{\alpha} > \alpha$ platí

$$\|Q_n u\|_{H^\alpha} = \|u - P_n u\|_{H^\alpha} \le \lambda_{n+1}^{\frac{\alpha-\tilde{\alpha}}{2}} \|u\|_{H^{\tilde{\alpha}}} \tag{6}$$

a tedy $P_n \to u$, $Q_n u \to 0$, $n \to \infty$ silně v H^α (viz d.ú. 6).
Poznamenejme, že operátory P_n, Q_n, A^β a e^{-tA} (definovaný níže) vesměs komutují.

4. Spojitost. H^α tvoří přirozenou škálu prostorů, na nichž působí operátor A a jeho mocniny: A je spojitý z H^α do $H^{\alpha-2}$, dokonce se jedná o vzájemně jednoznačné izometrické zobrazení. Obecněji $A^\beta : H^\alpha \to H^{\alpha-2\beta}$ izometricky. To vše plyne snadno z definic. Speciálně $A : H^2 \to H^0$ a $A^{-1} : H^0 \to H^2$ jsou vzájemně inverzní izometrie. Bývá zvykem označovat pro $\beta > 0$ definiční obor A^β

$$\mathcal{D}(A^\beta) = \{u \in H^0;\ A^\beta u \in H^0\} \tag{7}$$

a z řečeného je jasné, že $\mathcal{D}(A^\beta) = H^{2\beta}$, speciálně $\mathcal{D}(A) = H^2$.
Protože $H^{\tilde\alpha} \hookrightarrow H^\alpha$ pro $\tilde\alpha \geq \alpha$, je A^β spojitý (dokonce kompaktní) $H^\alpha \to H^\alpha$, pokud $\beta < 0$. Naopak pro $\beta > 0$ jde o neomezené operátory, které jsou však uzavřené: pokud $u_n \in \mathcal{D}(A)$ a $u_n \to u$, $Au_n \to v$ silně v H^0, pak již $u \in \mathcal{D}(A)$ a $Au = v$. Z uzavřenosti lze mj. odvodit, že

$$\frac{d}{dt} Au = A\left(\frac{d}{dt}u\right) \tag{8}$$

$$\int_0^T Au = A\left(\int_0^T u\right) \tag{9}$$

přesněji řečeno: má-li levá strana smysl, má ho i pravá a rovnají se. Derivace chápame jako slabé (nebo bodové), integrály Bochnerovy.

5. Součiny. V aplikacích na diferenciální rovnice se pracuje s ekvivalentními vyjádřeními norem: např.

$$(u, A^{2\beta}u)_{H^0} = (A^\beta u, A^\beta u)_{H^0} = \|u\|^2_{H^{2\beta}} \tag{10}$$

což je jasné formálně a jistě to platí, náleží-li uvedené součinitele do H^0. Při práci s $\frac{d}{dt}u$ se pak užívají vzorečky

$$(\frac{d}{dt}u, A^{2\beta}u)_{H^0} = (\frac{d}{dt}A^\beta u, A^\beta u)_{H^0} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{H^{2\beta}} \tag{11}$$

kde opět derivace chápeme slabě a zúčastněné funkce náleží do $L^2(I; H^0)$.

5. Konkrétní realizace. Prostor H^0 je zřejmě totéž co l^2, je-li obecněji u_j úplná ON báze Hilbertova prostoru H, pak $H^0 = H$ a $\sum_j c_j u_j$ konverguje v H. Nejčastější aplikace je $H = L^2(\Omega)$ a u_j jsou vlastní funkce Dirichletova laplaciánu, tj. úlohy $-\Delta u = \lambda u$ v Ω s okrajovou podmínkou $u = 0$ na $\partial\Omega$. Lze postupně ukázat (je to ale docela pracné, a je potřeba zejména, aby hranice Ω byla dost hladká), že taková posloupnost vlastních funkcí existuje, tvoří úplnou (po vhodném normování také ON) bázi $L^2(\Omega)$ a příslušná vlastní čísla splňují (1). Je známo, že $\lambda_j \sim j^{2/n}$, pokud $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
Zavedeme-li v této situaci prostory H^α jako výše, lze dále dokázat, že $H^1 = W^{1,2}_0(\Omega)$, přičemž $\|u\|^2_{H^1} = \int_\Omega |\nabla u|^2$ a vnoření $H^1 \subset H^0$ je Poincarého nerovnost s příslušnou konstantou $\lambda_1^{-1/2}$. Podobně lze ukázat, že $H^2 = \mathcal{D}(A) = W^{1,2}_0(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$. Dále platí $H^{-1} = W^{-1,2}(\Omega)$.

6. Aplikace. Jde o přirozené prostory funkcí pro popis řešení abstraktních evolučních rovnic, v nichž A je hlavní operátor. Jde nám obecně o rovnici

$$\frac{d}{dt}u + Au + F(u) = 0, \qquad u(0) = u_0 \tag{12}$$

pro neznámou funkci $u(t) : [0,T] \to H^\alpha$. Tu můžeme chápat jako funkci $t \mapsto \sum_j c_j(t) u_j$, a (12) jako „ODR" v $\mathbb{R}^\infty$. Člen $F(\cdot)$ je obecně nelinearita s vhodnými předpoklady, například

$$\begin{gathered} F(\cdot) \in C^2(H^\alpha, H^0) \\ \mathcal{B} \subset H^\alpha \text{omezená} \implies F(\mathcal{B}) \subset H^0 \text{omezená} \end{gathered} \tag{13}$$

Uvážíme-li, že A funguje z H^2 do H^0, tj. „ztrácí" dvojku ve škále uvedených prostorů, říká podmínka $\alpha < 2$ v (13), že $F(\cdot)$ je operátor nižšího řádu než A. Podmínka (13) vypadá exoticky, nicméně pro konkrétní situaci v bodě 5 výše je s ohledem na Sobolevovská vnoření $H^\alpha \subset L^p(\Omega)$ přirozeně splněna pro operátory Niemyckého typu

$$F : u(x) \mapsto f(u(x)) \tag{14}$$

kde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce vhodného polynomiálního růstu a $\alpha > 0$ dost velké.

7. Exponenciála. Podívejme se na příslušnou *lineární* rovnici

$$\frac{d}{dt}u + Au = 0, \qquad u(0) = u_0 \tag{15}$$

Pokud $u_0 = \sum_j c_j u_j$, pak očekáváme, že

$$u(t) = \sum_j e^{-\lambda_j t} c_j u_j \tag{16}$$

je řešení pro $t \geq 0$. Bývá zvykem označovat pravou stranu (16) jako $e^{-tA}u_0$. Snadno se nahlédne, že zobrazení $(t, u_0) \mapsto e^{-tA}u_0$ je spojité z $[0,\infty) \times H^\alpha$ do H^α. Normu operátoru e^{-tA} na H^α lze odhadnout číslem $e^{-\lambda_1 t}$.

Velice důležitá je tzv. shlazovací vlastnost: lze dokázat, že pro $t > 0$ jde e^{-tA} z H^0 již do libovolného H^α a platí odhad

$$\|e^{-tA}\tilde{u}\|_{H^\alpha} \leq Mt^{-\frac{\alpha}{2}}\|\tilde{u}\|_{H^0}, \qquad t > 0 \tag{17}$$

s vhodným $M > 0$, jež lze spočítat a jež obecně závisí na α, viz (d.ú. 6). Odsud speciálně plyne, že pro $t > 0$ je $e^{-tA}u_0$ již prvkem H^2, v (16) lze derivovat člen po členu a rovnice (15) je splněna pro každé $t > 0$. Pokud $u_0 \in H^2$, je rovnice splněna i v bodě $t = 0$ (derivováno zprava).

7. Pojem řešení. Zabývejme se konečně obecnou nelineární (přesněji semilineární) rovnicí (12). Funkce $u(t) : [0,T] \to H^\alpha$ se nazve *klasické řešení*, pokud všechny členy rovnice jsou spojité z $[0,T]$ do H^α, derivaci chápeme bodově, rovnice je splněna ve všech časech.

Funkce $u(t)$ se nazve *silné řešení*, pokud všechny členy rovnice jsou integrovatelné funkce v $[0,T]$ s hodnotami v H^α, rovnice je splněna skoro všude, derivace se chápe slabě. Ekvivalentně, integrovatelnost všech členů + integrální identita

$$u(t) + \int_0^t Au(s) + F(u(s))\,ds = u_0, \qquad t \in [0,T] \tag{18}$$

Poznamenejme, že $Au \in L^1(0,T;H^\alpha)$ nastává právě když $u \in L^1(0,T;H^{\alpha+2})$.

Klíčovým pojmem teorie je tzv. *mild řešení* („mírné řešení“). Funkce $u(t) : [0,T] \to H^\alpha$ se nazve mild řešení, pokud je splněna identita

$$u(t) = e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{(s-t)A}F(u(s))\,ds, \qquad t \in [0,T] \tag{19}$$

Není těžké ukázat, že (19) je formálně ekvivalentní (12) (integrační faktor e^{tA}). Obecně platí, že klasické řešení je silné a silné je mild řešení, kterýžto pojem řešení je tedy nejslabší ze všech.

Teorie pro (12) se buduje tak, že se ukáže existence a jednoznačnost mild řešení pomocí věty o pevném bodě v prostoru $C([0,T_0];H^\alpha)$ pro nějaké malé $T_0 > 0$. Klíčové jsou odhady integrálního členu, v nichž se používá (17) a (13). Toto řešení má maximální prodloužení, a vhodné předpoklady na $F(\cdot)$ umožní pak odvodit, že má i vyšší regularitu (a je tedy silným či dokonce klasickým řešením), závisí spojitě (diferencovatelně) na počáteční podmínce, atd. Celá teorie je formálně velice podobná základní teorii pro ODR.

Je však důležité, že řešení lze obecně konstruovat jen „dopředu“, což souvisí s tím, že operátor A je „neomezený na správnou stranu“ (odborně řečeno je disipativní); a to opět s tím, že v exponenciále musí před A vždy být *nekladný* faktor, srovnej (16) a (19).