Studujeme abstraktní evoluční rovnici

$$\frac{d}{dt}u + Au = F(u), \qquad u(0) = u_0 \tag{1}$$

pro neznámou funkci $u(t) : I \to H^\alpha$, kde $I = [0, \tau]$ je časový interval. Předpokládáme $F(u) \in C^2(H^\alpha, H^0)$, kde $\alpha \in [0, 2)$ je v celém textu pevné.
Prostory H^α úzce souvisí s vlastnostmi operátoru A a jeho spektrem a jsou popsány ve zvláštním textu.

Definice. Funkce $u(t) : [t_0, t_1] \to H^\alpha$ se nazve *mírné* ("mild") řešení (1) v intervalu $[t_0, t_1]$, jestliže je spojitá a splňuje

$$u(t) = e^{-(t-t_0)A}u(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-s)A}F(u(s))\, ds, \qquad \forall t \in [t_0, t_1]$$

Poznámky. Heuristika: integrační faktor $e^{-(t-t_0)A}$, formálně variace konstant. Definice má smysl – integrál je konečný (jako Bochnerův v H^α.) Pro mírné řešení platí princip nalepování.

Věta 1. [Banachova zobecněná.]. Nechť X, Y jsou Banachovy prostory, $U \subset X$, $V \subset Y$ omezené uzavřené množiny, a nechť $T(x, y) : U \times V \to U$ je uniformní kontrakce, tj.

$$\|T(x_1, y) - T(x_2, y)\|_X \le \theta \|x_1 - x_2\|_X \qquad \forall x_1,\ x_2 \in U,\ y \in V$$

Potom pro každé $y \in V$ existuje jediné $g(y) \in U$ takové, že platí $g(y) = T(g(y), y)$ pro $\forall y \in V$.
Dále platí: je-li $T(x, y)$ spojité (resp. lipschitzovské, resp. C^k), má $g(y)$ analogickou vlastnost.

Poznámka. V případě C^1 pro funkci $g(y)$ platí

$$Dg(y) = D_xT(g(y), y)Dg(y) + D_yT(g(y), y)$$

Symbolem D značíme Fréchetův diferenciál, případný dolní index říká, vůči které proměnné.

Věta 2. Nechť $u_0 \in H^\alpha$ je dáno. Pak existují $\rho > 0$ a $\tau > 0$, závisející pouze na $\|u_0\|_\alpha$ tak, že pro každé $\tilde{u} \in B(u_0, \rho)$ existuje jediné mírné řešení na $[0, \tau]$, splňující $u(0) = \tilde{u}$.
Dále platí: operátor řešení $\mathscr{S}(t, u_0)$ je spojitý, dokonce C^2 (vůči času jen pro $t > 0$). Příslušné diferenciály jsou mírným řešením rovnic ve variacích.

Lemma 1. [Shlazovací vlastnost.] Pro pevné $t > 0$ je operátor řešení $\mathscr{S}(t, u_0)$ lokálně lipschitzovský z H^α do $H^{\tilde{\alpha}}$, pro libovolné $\tilde{\alpha} \in (\alpha, 2)$.

Lemma 2. Nechť $v(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A}h(s)\, ds$, $t \in I$, kde $h(t) \in C^{0,1}(I; H)$. Potom $v(t) \in C^{0,1}(I; H) \cap L^1(I; D(A))$ a $\frac{d}{dt}v + Av = h(t)$ s.v. v I.
Jinými slovy: mírné řešení rovnice

$$\frac{d}{dt}v + Av = h(t), \qquad v(0) = 0$$

pro takto regulární $h(t)$ splňuje rovnici silně v H.

Důsledek. Mírné řešení rovnice (1) splňuje $u(t) \in C_{\mathrm{loc}}(I; \mathcal{D}(A))$ a pro $t > 0$ je rovnice splněna klasicky v H.

Lemma 3. Nechť $\beta \in [0, 1]$. Potom $A^\beta u$ je přípustná testovací funkce, funkce $t \mapsto \|u(t)\|_\beta^2$ je slabě diferencovatelná a platí

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_\beta^2 = -(\frac{d}{dt}u, A^\beta u) = -\|u\|_{\beta+1}^2 + (F(u), A^\beta u) \qquad \text{skoro všude v } I$$

Poznámka. Omezení $\beta \le 1$ vychází z toho, aby měl poslední člen smysl v součinu $F(u)$, $A^\beta u \in H^0$. Pokud by bylo $F(u) \in H^\gamma$, mohlo by se testovat $A^{\beta+\gamma}u$ a dostali bychom $u(t) \in L^2(I; H^{2+\gamma/2})$, tj. lepší prostorovou regularitu než $H^2 = \mathcal{D}(A)$.

Předpoklad disipativity. V dalším budeme navíc předpokládat, že $\alpha \in [0, 1]$ a že existuje $\rho > 0$ takové, že $(F(u) - Au, A^\alpha u) < 0$ pro všechna $u \in H^2$ taková, že $\|u\|_\alpha \ge \rho$.

Věta 3. [Zpětná jednoznačnost.] Jsou-li $u(t)$, $v(t)$ mírná řešení a platí $u(t_1) = v(t_1)$ pro nějaké $t_1 > 0$, je už $u(t) = v(t)$ pro všechna $t \in [0, t_1]$.

Důsledky. Globální existence řešení, dokonce existence omezené pohlcující množiny.

Poznámky k aplikaci. V typických aplikacích je $F(u)$ Niemyckého operátor $u(x) \mapsto f(u(x), \nabla u(x))$, kde $f(z, w) : \mathbb{R}^{1+d} \to \mathbb{R}$ je polynomiální funkce, A je $-\Delta$ v nějaké omezené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a tedy H^α je v zásadě $W^{\alpha,2}(\Omega)$ + okrajové podmínky, speciálně $H = H^0 = L^2$.
Není těžké ověřit, že $F(u)$ je lokálně lipschitzovský $H^\alpha \to H^0 = L^2$; ale pokud chci C^1, neobejdu se bez vnoření $H^\alpha \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, tj. potřebuji $\alpha > d/2$. Na druhou stranu disipativita pro α větší než jedna je obvykle beznadějná záležitost. Z toho plyne, že uvedená teorie je aplikovatelná jenom v dimenzi $d = 1$, nebo pro silnější disipaci $A = (-\Delta)^2$ apod.

Definice. Dynamickým systémem rozumíme dvojici $(S(t), X)$, kde X je Banachův prostor a $S(t) : X \to X$ jsou (obecně nelineární) operátory splňující

(i) $S(0) = I$

(ii) $S(t)S(s) = S(t + s)$, t, $s \ge 0$

(iii) zobrazení $(t, u) \mapsto S(t)u$ je spojité $[0, \infty) \times X \to X$.

Poznámky. Dynamický systém = c_0-semigrupa, avšak obecně nelineární. Evoluční rovnice + globální existence řešení + spojitá závislost na počáteční podmínce v X: operátory řešení tvoří dynamický systém v X.
V dalším $(\mathscr{S}(t), H^\alpha)$ bude dynamický systém operátorů řešení (1).

Definice. Množina $A \subset X$ se nazve *globální atraktor* dynamického systému $(S(t), X)$, jestliže

1. A je kompaktní v X
2. A je invariantní, tj. $S(t)A = A$ pro každé $t \ge 0$
3. A uniformně přitahuje všechna řešení pro $t \to \infty$, tj.

   $$\mathrm{dist}_X(S(t)u_0, A) \to 0, \qquad t \to \infty$$

   stejnoměrně vůči $u_0 \in B$, kde $B \subset X$ libovolná omezená množina.

Poznámky. Globální atraktor, pokud existuje, je určen jednoznačně: je to nejmenší uzavřená množina s přitahující vlastností (iii); zároveň je to největší kompaktní invariantní množina.

Věta 4. Dynamický systém $(\mathscr{S}(t), H^\alpha)$ určený rovnicí (1) má globální atraktor $\mathcal{A}$.

Definice. Nechť X je Banachův prostor, nechť $A \subset X$ je relativně kompaktní množina. Potom definujeme pokrývací číslo $N_X(A, \varepsilon)$ jako nejmenší počet ε-koulí v X, pokrývajících A.

Dále definujeme počítací dimenzi (box-counting dimension) množiny A v prostoru X jako

$$\text{b-dim}_X(A) = \limsup_{\varepsilon \to 0+} \frac{\ln N_X(A,\varepsilon)}{-\ln \varepsilon}$$

Poznámky. Definice nezávisí na variantách pokrývacího čísla (lze brát koule v jiné ekvivalentní normě, místo koulí libovolné množiny diametru $\leq \varepsilon$, v $\mathbb{R}^d$ krychle o hraně ε – odtud název „box-counting".)
Pro omezenou $G \subset \mathbb{R}^d$ je $\text{b-dim}_{\mathbb{R}^d}(G) \leq d$. Naopak, má-li G neprázdný vnitřek, je $\text{b-dim}_{\mathbb{R}^d}(G) \geq d$.
Lipschitzovské zobrazení nezvětší počítací dimenzi, a tedy bi-lipschitzovská zobrazení (speciálně difeomorfismy) počítací dimenzi nemění.
Další rozumnou vlastností, kterou požadujeme od pojmu dimenze, jsou vnořovací věty. Pro počítací dimenzi platí následující:

Věta 5. [Maňého věta.] Nechť $A \subset X$ je kompaktní množina a $\text{b-dim}_X(A) < m/2$. Potom existuje spojité lineární zobrazení $L : X \to \mathbb{R}^{2m+1}$ takové, že $L|_A$ je prosté.

Věta 6. Globální atraktor $\mathcal{A}$ rovnice (1) má konečnou počítací dimenzi v H^α.

Lemma 4. Nechť X, Y jsou Banachovy prostory, kde $Y \hookrightarrow\hookrightarrow X$, $A \subset X$ omezená množina a L zobrazení takové, že $L(A) = A$ a L je na A lipschitzovské $X \to Y$.
Potom A má konečnou počítací dimenzi v X (a též v Y).

Poznámky. Kombinací Vět 5 a 6 plyne, že globální atraktor lze parametrizovat z R^n pro dosti velké n. Označíme-li $p(t) = Lu(t)$ a $\mathcal{L} = (L|\mathcal{A})_{-1}$, pak $p(t)$ splňuje systém ODR

$$\frac{d}{dt}p(t) = LG(\mathcal{L}(p(t)) \tag{2}$$

kde $G(u) = F(u) - Au$ je pravá strana rovnice (1). Potíž je v tom, že $\mathcal{L}$ je obecně jen Hölderovské, nikoliv lipschitzovské, a tedy pravá strana rovnice (2) nemá dostatečnou regularitu, aby řešení $p(t)$ určila jednoznačně.
To motivuje následující definici.

Definice. Nechť $\mathcal{K} \subset H^\alpha$ je kompaktní, invariantní vůči $\mathscr{S}(t)$. Řekneme, že rovnice (1) má na $\mathcal{K}$ konečně-dimenzionální dynamiku, jestliže existuje $n \in \mathbb{N}$, lipschitzovská $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a bi-lipschitzovská $g : \mathcal{K} \to \mathbb{R}^n$ takové, že $g(\mathscr{S}(t)u_0) = \varphi(t)g(u_0)$, pro $t \geq 0$, kde $\varphi(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je řešicí funkce rovnice

$$x' = h(x), \qquad x(0) = x_0 \tag{3}$$

Poznámky. Z teorie ODR víme, že $\varphi(t)$ je dobře definováno, a platí $\operatorname{Lip}_{\mathbb{R}^n} \varphi(t) \leq \exp(|t| \operatorname{Lip}_{\mathbb{R}^n} h)$ dle Gronwalla. Viz též následující lemma.

Lemma 5. Nechť $\mathcal{N}$ je invariantní množina, nechť $G(u) = F(u) - Au$ je na $\mathcal{N}$ lipschitzovská $H^\theta \to H^\theta$, kde $\theta < 2$ je libovolné. Potom $\mathscr{S}(t)$ je na $\mathcal{N}$ prosté, a po rozšíření i na $t \leq 0$ zde splňuje $\operatorname{Lip}_{H^\alpha} \mathscr{S}(t) \leq Ke^{|t|\omega}$ pro $\forall t \in \mathbb{R}$, s vhodnými K, $\omega > 0$.

Lemma 6. Nechť $\mathcal{K} \subset H^\alpha$ je kompaktní. Potom $G \circ \mathscr{S}(t)$ je lipschitzovské $H^\alpha \to H^\alpha$, pro libovolné $t > 0$ pevné.

Definice. Nechť X je Banachův prostor. Projekcí na X rozumíme $P \in \mathcal{L}(X)$, splňující $P^2 = P$. Symbolem $\Pi(X,n)$ značíme množinu všech projekcí na X ranku n. Snadno se ověří, že $P \in \Pi(X,n)$ jsou právě všechny funkcionály tvaru

$$Pu = \sum_{i=1}^{n} f_i(u)u_i$$

kde $u_1, \dots u_n \in X$ jsou LN a $f_1, \dots f_n \in X'$ jsou adjungované, tj. $f_i(u_j) = \delta_{ij}$ pro $i,\ j = 1, \dots, n$. Také si lze rozmyslet, že $\Pi(X, n)$ je uzavřená podmožina $\mathcal{L}(X)$ (v operátorové normě), a tedy úplný metrický prostor.

Lemma 7. Nechť $\theta > \nu$ jsou libovolná, $k \geq 1$. Potom množina $\Pi(H^\theta, n) \cap \Pi(H^\nu, n)$ je hustá v $\Pi(H^\theta, n)$ vůči normě $\mathcal{L}(H^\theta)$. Podrobněji: pro každé $\varepsilon > 0$ a $P \in \Pi(H^\theta, n)$ existuje $\tilde{P} \in \Pi(H^\theta, n) \cap \Pi(H^\nu, n)$ takové, že $\|P - \tilde{P}\|_{\mathcal{L}(H^\theta)} < \varepsilon$.

Věta 7. Nechť $\mathcal{K} \subset H^\alpha$ je kompaktní, invariantní množina. Potom je ekvivalentní:

1. rovnice (1) má na $\mathcal{K}$ konečně-dimenzionální dynamiku
2. $G(u) = F(u) - Au$ je na $\mathcal{K}$ lipschitzovské $H^\alpha \to H^\alpha$
3. $\mathscr{S}(t)$ je na $\mathcal{K}$ prosté, a po rozšíření na $t \leq 0$ zde splňuje $\mathrm{Lip}_{H^\alpha} \mathscr{S}(t) \leq Ke^{|t|\omega}$ pro $\forall t \in \mathbb{R}$, s vhodnými $K,\ \omega > 0$.
4. existuje $n \in \mathbb{N}$ a $c > 0$ tak, že $\|u - v\|_{H^\alpha} \leq c\|P_n(u - v)\|_{H^\alpha}$ pro $\forall u,\ v \in \mathcal{K}$
5. existuje $n \in \mathbb{N}$, $c > 0$ a $P \in \Pi(H^\alpha, n)$ takové, že $\|u - v\|_{H^\alpha} \leq c\|P(u - v)\|_{H^\alpha}$ pro $\forall u,\ v \in \mathcal{K}$
6. normy H^α, $H^{\alpha-2}$ určují na $\mathcal{K}$ ekvivalentní metriky

Poznámky. Postup důkazu je $2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 2$ a $1 \to 3$, $5 \to 1$. Technicky nejtěžší je krok $3 \to 4$.