Úmluva. Pro jednoduchost vynecháváme symbol * u standardních čísel, reálných funkcí a relací v $\mathbb{R}$. Tj. píšeme 0, 1 místo ^{*0}, ^{*1}, $\sin$ místo $^*\sin$, atd.
V tomto smyslu je ${}^\sigma\mathbb{R} = \mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$, a všechny funkce a relace v $\mathbb{R}$ chápeme přirozeně jako rozšířené do ${}^*\mathbb{R}$.

Tvrzení 1. Nechť $\tilde{x} \in {}^*\mathbb{R}$ je ohraničené. Pak existuje jediné $x_0 \in \mathbb{R}$ takové, že $\tilde{x} \approx x_0$.
Důkaz. Jednoznačnost: nechť x_0, $x_1 \in \mathbb{R}$ jsou taková, že $\tilde{x} \approx x_0$ a zároveň $\tilde{x} \approx x_1$. Pak ovšem také $x_0 \approx x_1$, tj. $|x_0 - x_1| < \varepsilon$ pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, a tedy nutně $x_0 = x_1$.
Existence: definujme množinu

$$M = \{y \in \mathbb{R};\ y < \tilde{x}\}$$

Dle předpokladu $|\tilde{x}| < c$, neboli $-c < \tilde{x} < c$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}_+$. Odtud $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná, shora omezená.
Tedy existuje $x_0 = \sup M \in \mathbb{R}$. Dokážeme, že $\tilde{x} \approx x_0$. Buď tedy $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ libovolné. Rozmysleme si, že $|\tilde{x} - x_0| < \varepsilon$, neboli

$$x_0 - \varepsilon < \tilde{x} < x_0 + \varepsilon$$

Levá nerovnost platí, protože pokud $\tilde{x} \leq x_0 - \varepsilon$, bylo by $x_0 - \varepsilon$ horní odhad M, ostře menší než x_0. Naopak pravá nerovnost platí, protože $\tilde{x} \geq x_0 + \varepsilon$ by znamenalo, že $x_0 + \varepsilon \in M$, avšak to je ostře větší než $x_0 = \sup M$.

Definice. Pro každé $\tilde{x} \in {}^*\mathbb{R}$ ohraničené definujme $\operatorname{sh} \tilde{x}$ (tzv. stín neboli standardní část $\tilde{x}$) jako číslo $x_0 \in \mathbb{R}$, zaručené předchozí větou.

Důsledek. Existují nekonečně malá čísla (jiný důkaz). Podle principu rozepnutí existuje $\tilde{x} \in {}^*[0,1] \setminus [0,1]$. Protože (díky transferu) je $0 \leq \tilde{x} \leq 1$, je toto $\tilde{x}$ nutně ohraničené. Označme $x_0 = \operatorname{sh} \tilde{x}$. Snadno si rozmyslíme, že musí být $x_0 \in [0,1]$.
Nemůže však být $x_0 = \tilde{x}$, protože $\tilde{x} \in [0,1]$ jsme vyloučili hned na počátku. Je tedy $x_0 - \tilde{x}$ nekonečně malé, leč nenulové.

V dalším předpokládejme, že $f : I \to \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$, a $x_0 \in I$. Připomeňme, že dle úmluvy výše je zároveň $f : {}^*I \to {}^*\mathbb{R}$.

Tvrzení 2. Budiž dána funkce $f : I \to \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$, a bod $x_0 \in I$. Potom je ekvivalentní:
(i) f je spojitá (vzhledem k I) v bodě x_0, tj.

$$\big(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\big)\big(\exists \delta \in \mathbb{R}_+\big)\big(\forall x \in I\big) :\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{1}$$

(ii) $\big(\forall x \in {}^*I\big) :\ x \approx x_0 \implies f(x) \approx f(x_0)$

Důkaz. (i) $\implies$ (ii) Fixujme $\tilde{x} \in {}^*I$ takové, že $\tilde{x} \approx x_0$. Chceme ukázat, že $f(\tilde{x}) \approx f(x_0)$, neboli

$$|f(\tilde{x}) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \tag{2}$$

Fixujme tedy $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ pevné, libovolné. Dle (1) existuje $\delta \in \mathbb{R}_+$ takové, že platí formule

$$\big(\forall x \in I\big) :\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Aplikací transferu (a s ohledem na to, že u čísel ε, δ, x_0 a funkce f nepíšeme hvězdičku) plyne

$$\big(\forall x \in {}^*I\big) :\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Speciálně pro naše výchozí $\tilde{x} \approx x_0$ je premisa implikace splněna, tedy platí i závěr $|f(\tilde{x}) - f(x_0)| < \varepsilon$. Leč ε bylo libovolné, tedy máme (2).

(ii) $\implies$ (i) Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ pevné, libovolné. Fixujme dále $\delta \in {}^*\mathbb{R}_+$ nekonečně malé. Zřejme tedy $|x - x_0| < \delta$ implikuje $x \approx x_0$. S ohledem na (ii) platí tedy formule

$$\big(\forall x \in {}^*I\big) :\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \approx 0$$

a tedy též

$$\big(\forall x \in {}^*I\big) :\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

pro výše fixované $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Formuli můžeme dále přepsat jako

$$\big(\exists \delta \in {}^*\mathbb{R}_+\big)\big(\forall x \in {}^*I\big) :\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Nyní použijeme zpětný transfer, tj. smažeme hvězdičky (jež by opět správně měly být i u x_0, ε a f), a dostaneme

$$\big(\exists \delta \in \mathbb{R}_+\big)\big(\forall x \in I\big) :\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Protože ε bylo libovolné, dokázali jsme (1), tj. (i) platí.

Tvrzení 2'. Budiž dána funkce $f : I \to \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$, Potom je ekvivalentní:
(i) f je stejnoměrně spojitá v I, tj.

$$\big(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\big)\big(\exists \delta \in \mathbb{R}_+\big)\big(\forall x, y \in I\big) :\ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{3}$$

(ii) $\big(\forall x, y \in {}^*I\big) :\ x \approx y \implies f(x) \approx f(y)$

Tvrzení 3. Nechť X je množina v $\mathcal{U}$. Potom

1. ${}^\sigma\mathcal{P}(X)$ jsou právě všechny standardní podmnožiny ${}^*X$
2. ${}^*\mathcal{P}(X)$ jsou právě všechny internální podmnožiny ${}^*X$

Důkaz. Pro jednoduchost píšeme $X \subset Y$ místo korektního zápisu tranzitivně vázanou formulí

$$\big(\forall x \in X\big) :\ x \in Y$$

1. Nechť $B \in {}^\sigma\mathcal{P}(X)$. Tedy $B = {}^*A$ pro nějaké $A \in \mathcal{P}(X)$, speciálně B je standardní objekt. Zbývá ukázat, že $B \subset {}^*X$. Ovšem $A \in \mathcal{P}(X)$, tedy platí $A \subset X$, a odtud transferem ${}^*A \subset {}^*X$. Obráceně, předpokládejme, že $B \subset {}^*X$ a navíc B je standardní objekt, tj. $B = {}^*C$ pro nějaké $C \in \mathcal{U}$. Tedy platí ${}^*C \subset {}^*X$ a (zpětným) transferem $C \subset X$, neboli $C \in \mathcal{P}(X)$. Tudíž $B = {}^*C \in {}^\sigma\mathcal{P}(X)$, což jsme dokazovali.

2. Nechť $A \in {}^*\mathcal{P}(X)$. Tedy A je internální objekt. Chceme ukázat, že $A \subset {}^*X$. Nicméně zjevně platí formule

$$\big(\forall A \in \mathcal{P}(X)\big) :\ A \subset X$$

a odtud transferem

$$\big(\forall A \in {}^*\mathcal{P}(X)\big) :\ A \subset {}^*X$$

Obráceně, nechť $A \subset {}^*X$, a navíc A je internální objekt, tedy $A \in {}^*B$ pro nějaké $B \in \mathcal{U}$. Jistě platí formule

$$\big(\forall A \in B\big) :\ A \subset X \implies A \in \mathcal{P}(X)$$

Odtud transferem

$$\big(\forall A \in {}^*B\big):\ A \subset {}^*X \implies A \in {}^*\mathcal{P}(X)$$

Tedy $A \in {}^*\mathcal{P}(X)$ a důkaz je hotov.

Definice. Formule se nazve standardní (resp. internální), jestliže všechny její konstanty jsou standardní (resp. internální).
Predikátem se rozumí formule tvaru $\varphi(x)$ s jedinou volnou proměnnou x.

Tvrzení 4. Množina A je standardní (resp. internální), právě když ji lze napsat jako

$$A = \{x \in B:\ \varphi(x)\}$$

kde B je standardní (resp. internální) množina a $\varphi(x)$ je standardní (resp. internální) predikát.

Nestandardní oscilátory

Jako první budeme uvažovat následující problém

$$\begin{aligned} \big(x' + D(x)\big)' + s(x) &= f(t), \qquad t \in [0,T] \\ x(0) &= x_0 \\ x'(0) &= v_0 \end{aligned} \tag{P1}$$

kde $s(x)$ je standardní lipschitzovská funkce a

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \Delta x, & x \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

$\Delta > 0$, nekonečně velké.

Věta 2.* Úloha (P1) má právě jedno $*$-klasické řešení na $[0,T]$.
Důkaz. Plyne ihned transferem klasické Picardovy věty (neboť $D(x)$) je internální lipschitzovská funkce. Rovnici je pouze nutné přepsat pomocí substituce $z = x' + D(x)$ na systém

$$\begin{aligned} x' &= z - D(x) \\ z' &= f(t) - s(x) \end{aligned}$$

Pro $x < 0$ se úloha redukuje na standardní oscilátor $x'' + s(x) = f(t)$. Pro $x > 0$ naopak máme $x'' + \Delta x' + s(x) = f(t)$, kde člen $\Delta x'$ modeluje prostředí s nekonečně velkým odporem k pohybu.

Značení. Následujícím textu c značí kladnou standardní konstantu (jejíž hodnota se může řádek od řádku, či dokonce v témže řádku, měnit).

Lemma 1. Nechť $|z(0)|$, $|f(t)| \leq c$, pro $t \in [0,T]$. Pak řešení úlohy (P1) splňuje $x(t) \leq 0$ až na nekonečně malou poruchu, tj. $x(t) > 0$ implikuje $x(t) \approx 0$ pro každé $t \in [0,T]$.

Lemma 2. Nechť $x(0) = 0$, $x'(0) = v_0$, $f(t) \equiv \overline{f}$. Potom existuje $t_1 > 0$ nejmenší čas takový, že $x(t_1) = 0 \ldots$

Lemma 4. [Perturbační.] Uvažujme funkce $\psi(t) : U(t_0,\delta) \to \mathbb{R}$, kde t_0 a $\delta > 0$ jsou standardní. Nechť $\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)$ jsou internální hladké funkce, přičemž platí

- $\psi_1(t_0) = 0$, $\psi_1'(t_0) \not\approx 0$ na $U(t_0,\delta)$

- $\psi_2(t) \approx 0$, $\psi_2'(t) \approx 0$ na $U(t_0, \delta)$

Potom rovnice $\psi(t) = 0$ má právě jedno řešení $\tilde{t}_0 \in U(t_0, \delta)$, pro něž navíc platí $\tilde{t}_0 \approx t_0$.

Značení. V následujícím $x_1(t)$, $x_2(t)$ jsou dvě řešení, $\tilde{x} = x_1 - x_2$ je jejich rozdíl, a podobně $\tilde{z} = z_1 - z_2 = x_1' - x_2' + D(x_1) - D(x_2)$.

Lemma 3. [Stabilita x vůči z.] Pro libovolná řešení platí

$$\tilde{x}^2(t) \le c\big(\tilde{x}^2(0) + \int_0^t \tilde{z}^2(s)\,ds\big) \qquad t \in [0,T]$$

Věta 3. [Stabilita (P1).] Nechť $x_1(t)$, $x_2(t)$ splňují $x_1(0) \approx x_2(0)$ a $z_1(0) \approx z_2(0)$. Potom $x_1(t) \approx x_2(t)$ pro $t \in [0,T]$.

Zadruhé budeme uvažovat problém

$$\begin{aligned} x'' + \sigma(x) &= f(t) \qquad t \in [0,T] \\ x(0) &= x_0 \\ x'(0) &= v_0 \end{aligned} \tag{P2}$$

kde

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ Lx, & x \ge 0 \end{cases} \tag{5}$$

$L > 0$, nekonečně velké. Zřejmě $\sigma(x)$ je internální lipschitzovská funkce, která, jak uvidíme, modeluje odraz od nekonečně tuhé překážky na pozici $x = 0$. Budeme rozumné předpokládat, že $x_0 < 0$ a $v_0 \in \mathbb{R}$ jsou standardní.

Definice. Energii řešení $x(t)$ úlohy (P2) definujeme jako $E(t) = \frac{1}{2}(x')^2(t) + S(x(t))$, kde $S(x) = \int_0^x \sigma(\xi)\,d\xi$, tj.

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{L}{2}x^2, & x \ge 0 \end{cases}$$

Násobením rovnice x' vznikne energetická rovnost

$$\frac{d}{dt}E(t) = f(t)x' \tag{6}$$

Lemma 5. Nechť $E(0)$, $f(t)$ jsou ohraničené pro každé $t \in [0,T]$. Potom $E(t)$ je ohraničené pro každé $t \in [0,T]$. Speciálně $x(t) \lessapprox 0$ pro každé $t \in [0,T]$.
Důkaz. Z (6) a Youngovy nerovnosti

$$\frac{d}{dt}E(t) \le c|x'| \le \frac{c^2}{2} + \frac{(x')^2}{2} \le c + E(t)$$

a odtud snadno integrací $E(t) \le (c + E(0))e^t$, $t \in [0,T]$. K důkazu druhé části stačí uvážit, že pokud $x > 0$, je $Lx^2/2 \le E(t) \le c$, a tedy $x \le \sqrt{2c/L} \approx 0$.

Lemma 6. [O odrazu od stěny.] Nechť $x(t_0) \ge 0$, a nechť $E(t_0)$ *není* nekonečně malé. Potom existují nekonečně blízká $t_1 \le t_0 \le t_2$ tak, že $x(t) > 0$ na (t_1, t_2), $x(t_1) = x(t_2) = 0$, $x'(t_1) \approx \sqrt{2E(t_0)} \approx -x'(t_2)$.

Poznámka. Co se bude dít, pokud $x(t_0) = 0$? Situaci $x'(t_0) \not\approx 0$ řeší předchozí lemma. Pokud $x(t_0) = 0$ a $x'(t_0) \approx 0$, rozhoduje znaménko $f(t)$. Pro $f(t) \leq 0$ je snadno si rozmyslet, že bude $x(t) \leq 0$.
Uvažme situaci (BÚNO $t_0 = 0$), kde $x(0) = x'(0) = 0$ a systému udělíme jednotkový impuls síly $f(t) \equiv \overline{f}$, $t \in [0, t_f]$, kde $t_f = 1/\overline{f}$. Snadno se spočte, že potom

$$x(t) = \frac{\overline{f}}{\omega^2}\big(1 - \cos\omega t\big) \tag{7}$$

$$E(t) = \left(\frac{\overline{f}}{\omega}\right)^2 \sin^2\omega t \tag{8}$$

pro $t \in [0, t_f]$, kde $\omega = \sqrt{L}$. Jaká bude výsledná energie $E(t_f)$? Vidíme, že

- pokud $\overline{f} \ll \omega$, speciálně pro $\overline{f}$ ohraničené, je $E(t_f) \approx 0$.
- ovšem i pro $\overline{f} = \omega/k\pi$, $k \geq 1$ celé je $E(t_f) = 0$.
- naproti tomu pro $\overline{f} \gg \omega$ je $E(t_f) \approx 1$.

Jednotlivé případy odpovídají situaci, kdy délka pulsu t_f je mnohem větší resp. celý násobek resp. mnohem menší než přirozená doba (půl)kmitu systému π/ω.
Vidíme, že kladná síla, je-li dost singulární, může systém úderem proti zdi rozkmitat. Následující lemma ukazuje, že naopak dosti regulární kladná síla systém rozpohybovat nemůže.

Lemma 7. Nechť $x(t_0) \approx 0$, $E(t_0) \approx 0$, nechť $f(t)$ je standardní hladká funkce, splňující

$$\begin{aligned} f^{(k)}(t_0) &= 0, \quad k < n \\ f^{(n)}(t_0) &= c_0 > 0 \end{aligned} \tag{9}$$

pro vhodné $n \geq 0$ celé a c_0 standardní. Potom $E(t) \approx 0$ na $[t_0, t_0 + \delta]$ pro jisté $\delta > 0$ standardní.
Důkaz. BÚNO $t_0 = 0$. Pro vhodně malé (standardní) $\delta > 0$ můžeme předpokládat, že

$$c_0 \leq f^{(n)}(t) \leq c_0(1 + b)$$

kde $c_0 > 0$ a $b > 0$, kde b je libovolně malé. Integrací těchto nerovností pak dostaneme odhady

$$f(t) \geq c_0\frac{t^n}{n!}, \quad f(t) \leq ct^n, \quad f'(t) \leq c_0(1+b)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \tag{10}$$

Zavedeme si pomocnou energii

$$E_f(t) = E(t) - f(t)x + \eta$$

kde $\eta > 0$ je nekonečně malé kladné číslo zaručující, že $-f(t)x + \eta > 0$. Takové jistě existuje, neboť pro $x < 0$ je $-f(t)x \geq 0$, zatímco pro $x > 0$ plyne z Lemmatu 5 a ohraničenosti $f(t)$, že $|-f(t)x| \leq c/\sqrt{L}$.
Jest tedy $E_f(t) > 0$ a z (6) plyne

$$\frac{d}{dt}E_f(t) = -f'(t)x \tag{11}$$

Dle předpokladu máme $E_f(0) \approx 0$ a naším cílem bude ukázat, že $E_f(t) \approx 0$, odkud zřejmě i $E(t) \approx 0$, pro každé $t \in [0, \delta]$.

1. KROK. Nejprve ukážeme odhad

$$E_f(t) \leq c(\epsilon + t^{2n+2}) \tag{12}$$

s vhodným nekonečně malým $\epsilon > 0$. Nejprve z (6) dedukujeme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &\leq ct^n\sqrt{E+\epsilon} \\ \frac{d}{dt}\sqrt{E(t)+\epsilon} &\leq ct^n \\ \sqrt{E(t)+\epsilon} &\leq \sqrt{E(0)+\epsilon} + ct^{n+1} \\ E(t) &\leq c(\epsilon + t^{2n+2}) \end{aligned}$$

Tedy (12) platí pro $E(t)$ a chceme-li tento odhad i pro $E_f(t)$, stačí odhadnout $|-f(t)x| \leq ct^n|x(t)|$, kde dále z předchozího

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x(0)| + \int_0^t |x'(s)|\,ds \\ &\leq |x(0)| + c\int_0^t \sqrt{E(s)}\,ds \\ &\leq |x(0)| + c\int_0^t \epsilon + s^{n+1}\,ds \\ &\leq c(\tilde{\epsilon} + t^{n+2}) \end{aligned}$$

pro vhodné nekonečně malé $\tilde{\epsilon} > 0$.

2. KROK. Nyní odhadujeme pravou stranu (11). Pro $x \geq 0$ je jistě $-f'(t)x \leq 0$; pro $x < 0$ máme

$$-f'(t)x = \frac{f'(t)}{f(t)}\big(-f(t)x\big) \leq \frac{n(1+b)}{t}E_f(t)$$

Tedy celkem

$$\frac{d}{dt}E_f(t)/E_f(t) \leq \frac{n(1+b)}{t}$$

a integrací mezi τ a t dostaneme

$$E_f(t) \leq \frac{E_f(\tau)}{\tau^{n+nb}}t^{n+nb} \tag{13}$$

3. KROK. Posledním krokem je zvolit $\tau > 0$ nekonečně malé tak, aby

$$\frac{E_f(\tau)}{\tau^{n+nb}} \approx 0 \tag{14}$$

Pak jsme hotovi, neboť z (13) plyne $E_f(t) \approx 0$ pro $t \geq \tau$, zatímco díky (12) je jistě $E_f(t) \approx 0$ pro $t \in [0, \tau]$.

Ovšem takové τ jistě zvolit lze, neboť dle (12) je

$$\frac{E_f(\tau)}{\tau^{n+nb}} \leq c\left(\frac{\epsilon}{\tau^{n+nb}} + \tau^{n+2-nb}\right)$$

Věta 4. [Stabilita (P2).] Nechť $x_0 \lessapprox 0$, v_0 jsou standardní. Nechť $f(t)$ je standardní, hladká funkce, navíc taková, že pro každé $t_0 \in [0,T)$ buď platí (9), nebo existuje standardní $\delta > 0$ takové, že $f(t) = 0$ na $[t_0, t_0+\delta]$.
Potom pro libovolná dvě řešení $x_1(t)$, $x_2(t)$ úlohy (P2), splňující $x_1(0) \approx x_2(0) \approx x_0$, $x_1'(0) \approx x_2'(0) \approx v_0$, platí $x_1(t) \approx x_2(t)$ pro všechna $t \in [0,T]$.
Důkaz. Definujme

$$\tilde{I} = \{t \in [0,T];\ \tilde{x} \approx 0 \text{ na } [0,t]\}$$

kde jako výše značíme $\tilde{x} = x_1 - x_2$. Ukážeme, že $\tilde{I}$ je neprázdná, uzavřená a otevřená v $[0,T]$, odkud již plyne $\tilde{I} = [0,T]$ (tzv. plíživý argument). Důkaz strukturujeme do několika kroků kvůli lepší orientaci.
1. Uzavřenost plyne snadno z lipschitzovskosti $\tilde{x}(t)$, která je důsledkem ohraničenosti energie (Lemma 5).
2. Neprázdnost: ukážeme, že $[0,\delta] \subset \tilde{I}$ pro nějaké standardní $\delta > 0$. Z počátečních podmínek totiž $x_1(t)$, $x_2(t) < 0$ a tedy $\tilde{x}''(t) = 0$ na $[0,\delta]$, a tedy $\tilde{x}(t) = a + bt$, kde ovšem $a \approx b \approx 0$, opět dle předpokladů na počáteční podmínky.
3. Zbývá ukázat otevřenost (vůči $[0,T]$). Fixujeme tedy $t_0 \in (0,T) \cap \tilde{I}$ a chceme ukázat, že $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset \tilde{I}$, pro vhodné standardní $\delta > 0$. Z bodu 2 a definice $\tilde{I}$ plyne již ovšem, že

$$(t_0 - \delta, t_0] \subset \tilde{I} \qquad \text{pro vhodné } \delta > 0 \tag{15}$$

Nyní rozlišíme tři případy.
3a. Pokud $x_1(t_0) \lessapprox 0$, bude $x_1(t)$, $x_2(t) < 0$ na $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, tedy zde je $\tilde{x}'' = 0$ a odtud $\tilde{x}(t) = a + b(t - t_0)$. Ovšem z (15) nutně $a \approx b \approx 0$, a tedy $\tilde{x}(t) \approx 0$ i na $[t_0, t+\delta]$.
3b. Je-li $x_1(t_0) \approx 0$, a přitom $E_1(t_0) \not\approx 0$, jsme v situaci striktního odrazu (Lemma 6). Z (15) snadno vidíme, že $x_2(t)$ se odrazí stejnou rychlostí též nekonečně blízko času t_0, a tedy opět $x_1(t) \approx x_2(t)$ i na $[t_0, t+\delta]$.
3c. Nechť konečně $x(t_0) \approx 0$, a zároveň $E_1(t_0) \approx 0$. Tedy nutně $x_2(t_0) \approx 0$ a též $E_2(t_0) \approx 0$ (pokud by totiž $E_2(t_0) \not\approx 0$, muselo by též být $E_2(t_0) \not\approx 0$, úvahou v bodě 3b.)
Nyní zbývá aplikovat Lemma 7, dle něhož pak $x_1(t) \approx x_2(t) \approx 0$ na $[t_0, t_0 + \delta]$.