**Definice.** Hra (přesněji: konečná hra $N$-hráčů v normálním tvaru) je definována:

- $I = \{1, \dots, N\}$ ... množinou hráčů a dále pro každé $i \in I$:
- konečnou množinou $S_i$ (čistých) strategií $i$-tého hráče
- $\pi_i = \pi_i(s_1, \dots, s_N) : \times_{i \in I} S_i \to \mathbb{R}$ ... výplatní funkcí $i$-tého hráče.

Smíšené strategie $i$-tého hráče $\Delta(S_i)$ jsou pravděpodobnostní rozdělení na $S_i$, tj. jednoduše vektory $\sigma_i$ se složkami $\sigma_{i,s_i}$, $s_i \in S_i$, které odpovídají pravděpodobnosti, se kterou čistá strategie $s_i$ nastane při rozdělení $\sigma_i$. Tedy platí $\sigma_{i,s_i} \in [0,1]$ a $\sum_{s_i \in S_i} \sigma_{i,s_i} = 1$.
Jak vypadá zobecněná výplatní funkce, tj. $\pi_i(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$? Z pravděpodobnostní úvahy plyne ihned, že

$$\pi_i(\sigma_1, \dots, \sigma_N) = \underbrace{\sum_{(s_1,\dots,s_N)}}_{\substack{\text{suma přes} \\ \text{čisté } N\text{-tice}}} \underbrace{\prod_i \sigma_{i,s_i}}_{\substack{\text{pravděpodobnost, že} \\ \text{tato } N\text{-tice nastane}}} \underbrace{\pi_i(s_1, \dots, s_N)}_{\text{příslušný zisk}}$$

Tento výraz lze dále přepsat jako

$$\pi_i(\sigma_1, \dots, \sigma_N) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_{i,s_i} \underbrace{\sum_{(s_1,\dots,s_N) \not\ni s_i} \prod_{j \neq i} \sigma_{j,s_j} \pi_i(s_1, \dots, s_N)}_{\pi_i(\sigma_1,\dots,s_i,\dots\sigma_N)} \tag{1}$$

Tedy $\pi_i$ je lineární (přesněji afinní) vzhledem ke složkám vektoru pravděpodobností $\sigma_i$.

**Značení.** Bude vždy $i$, $i' \in I$ index hráče, $s_i$ proměnná probíhající čisté strategie $S_i$, jejichž počet činí $m_i$. Proměnná $\sigma_i \in \Delta(S_i)$ bude značit smíšené strategie, kde budeme (s ohledem na následující) formálně psát

$$\sigma_i = \sum_{h=1}^{m_i} \sigma_{i,h} e_h^{(i)}$$

tj. $\Delta(S_i)$ je vlastně $m_i - 1$-dimenzionální simplex s vrcholy $e_h^{(i)}$, $h = 1, \dots, m_i$, jež odpovídají čistým strategiím, tj. prvkům $S_i$. Tedy $\Delta(S_i)$ je kompaktní konvexní podmnožina $\mathbb{R}^{m_i - 1}$. Nosič smíšené strategie je definován jako

$$C(\sigma_i) = \left\{ s_i \in S_i;\ \sigma_{i,s_i} > 0 \right\}$$

tj. jsou to právě ty čisté strategie $s_i$, jejichž pravděpodobnost je nenulová při rozdělení $\sigma_i$.
Dále značíme prostor všech smíšených strategií

$$\Theta = \times_i \Delta(S_i)$$

s prvky $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$. Konečně pro $\sigma_i' \in \Delta(S_i)$ a $\boldsymbol{\sigma} \in \Theta$ zavádíme symbol

$$(\sigma_i', \boldsymbol{\sigma}_{-i}) = (\sigma_1, \dots, \sigma_i', \dots, \sigma_N)$$

pro nahrazení prvku $\sigma_i$ v $\boldsymbol{\sigma}$ prvkem $\sigma_i'$.

**Definice.** Nechť $\boldsymbol{\sigma} \in \Theta$ je dáno. Pak $\sigma_i' \in \Delta(S_i)$ nazveme nejlepší odpovědí $i$-tého hráče na $\boldsymbol{\sigma}$, značíme $\sigma_i' \in \beta_i(\boldsymbol{\sigma})$, jestliže

$$\pi_i(\sigma_i', \boldsymbol{\sigma}_{-i}) = \max_{\sigma_i' \in \Delta(S_i)} \pi_i(\sigma_i', \boldsymbol{\sigma}_{-i})$$

**Poznámka.** Množina $\beta_i(\boldsymbol{\sigma})$ je jistě neprázdná (heslo: spojitá na kompaktu). Platí však více:

**Lemma 1.** $\sigma_i' \in \beta_i(\boldsymbol{\sigma})$ právě když $\sigma_i'$ je kombinací nejlepších odpovědí, jež jsou zároveň čisté strategie. Speciálně existuje nejlepší odpověď v čistých strategiích.

*Důkaz.* Nechť $\sigma_i' \in \beta_i(\boldsymbol{\sigma})$ je libovolné. Pak s užitím (1)

$$\begin{aligned} 0 &= \pi_i(\sigma_i', \boldsymbol{\sigma}_{-i}) - \pi_i(\sigma_i', \boldsymbol{\sigma}_{-i}) - \\ &= \Big(\sum_{s_i \in C(\sigma_i')} \sigma_{i,s_i}'\Big)\pi_i(\sigma_i', \boldsymbol{\sigma}_{-i}) - \sum_{s_i \in C(\sigma_i')} \sigma_{i,s_i}' \pi_i(s_i, \boldsymbol{\sigma}_{-i}) \\ &= \sum_{s_i \in C(\sigma_i')} \underbrace{\sigma_{i,s_i}'}_{>0} \underbrace{\big[\pi_i(\sigma_i', \boldsymbol{\sigma}_{-i}) - \pi_i(s_i, \boldsymbol{\sigma}_{-i}\big]}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Tedy $\pi_i(s_i, \boldsymbol{\sigma}_{-i}) = \pi_i(\sigma_i', \boldsymbol{\sigma}_{-i})$ pro každé $s_i \in C(\sigma_i')$ a důkaz je hotov.

**Definice.** Prvek $\boldsymbol{\sigma} \in \Theta$ nazveme Nashovým ekvilibriem (N.e.), jestliže $\sigma_i \in \beta_i(\boldsymbol{\sigma})$ pro každé $i \in I$. Jinými slovy, žádný hráč nemůže zlepšit svůj zisk $\pi_i$ pouze změnou své strategie $\sigma_i$.

**Věta 1.** Existuje Nashovo ekvilibrium.

*Důkaz.* Definujme zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ předpisem

$$\sigma_{i,s_i} \mapsto \frac{\sigma_{i,s_i} + \max\{0, \pi_i(s_i, \boldsymbol{\sigma}_{-i}) - \pi_i(\boldsymbol{\sigma})\}}{1 + \sum_{s_i' \in S_i} \max\{0, \pi_i(s_i', \boldsymbol{\sigma}_{-i}) - \pi_i(\boldsymbol{\sigma})\}} \qquad i \in I, s_i \in S_i$$

Lehce se ověří, že $\boldsymbol{\varphi}$ je spojité $\Theta \to \Theta$, a protože $\Theta$ je kompaktní konvexní podmnožina $\mathbb{R}^M$, kde $M = -N + \sum_i m_i$, máme díky Brouwerově větě pevný bod.
K završení důkazu si rozmyslíme, že $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} \iff \boldsymbol{\sigma}$ je N.e. Označme

$$\mu_{i,s_i} = \max\{0, \pi_i(s_i, \boldsymbol{\sigma}_{-i}) - \pi_i(\boldsymbol{\sigma})\}$$

Zřejmě $\mu_{i,s_i} > 0$ právě když $s_i$ je lepší odpovědí $i$-tého hráče na $\boldsymbol{\sigma}$ než $\sigma_i$. Z Lemmatu 1 plyne, že $\boldsymbol{\sigma}$ je N.e. právě když $\mu_{i,s_i} = 0$ pro všechna $i$, $s_i$. Stačí tedy dokázat $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} \iff \mu_{i,s_i} = 0$ pro $\forall i$, $s_i$.
Implikace $\Longleftarrow$ je jasná. Obráceně, budiž $\boldsymbol{\sigma}$ pevný bod, tj.

$$\sigma_{i,s_i} = \frac{\sigma_{i,s_i} + \max\{0, \pi_i(s_i, \boldsymbol{\sigma}_{-i}) - \pi_i(\boldsymbol{\sigma})\}}{1 + \sum_{s_i' \in S_i} \max\{0, \pi_i(s_i', \boldsymbol{\sigma}_{-i}) - \pi_i(\boldsymbol{\sigma})\}} \qquad \forall i \in I, s_i \in S_i$$

Ukážeme, že pak nutně $\mu_{i,s_i} = 0$ pro $\forall i$, $s_i$. Sporem: nechť pro nějaké $i \in I$ je $\sum_{s_i' \in S_i} \mu_{i,s_i'} > 0$. Odtud snadnou úpravou

$$0 < \sigma_{i,s_i} = \frac{\mu_{i,s_i}}{\sum_{s_i'} \mu_{i,s_i'}} \qquad \forall i \in I, s_i \in C(\sigma_i)$$

Tedy

$$0 < \sum_{s_i \in C(\sigma_i)} \sigma_{i,s_i}\mu_{i,s_i} = \sum_{s_i \in C(\sigma_i)} \sigma_{i,s_i}\big[\pi_i(s_i, \boldsymbol{\sigma}_{-i}) - \pi_i(\boldsymbol{\sigma})\big] = \pi_i(\boldsymbol{\sigma}) - \pi_i(\boldsymbol{\sigma})$$

což je hledaný spor.

.................................. ODPŘEDNESENO 10.4.2017 ..................................

**Poznámky.** Ve speciálním případě dvou hráčů píšeme jednoduše $S_1 = \{1, \dots, m\}$, $S_2 = \{1, \dots, n\}$. Definujme matice $A$ a $B$ typu $m \times n$ jako

$$a_{kl} = \pi_1(k, l), \qquad b_{kl} = \pi_2(k, l) \qquad k = 1, \dots, m,\ l = 1, \dots, n$$

Prostory smíšených strategií jsou

$$\Delta_1 = \Big\{p \in \mathbb{R}^m;\ p_i \in [0, 1],\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1\Big\}$$
$$\Delta_2 = \Big\{q \in \mathbb{R}^n;\ q_i \in [0, 1],\ \sum_{i=1}^{n} q_i = 1\Big\}$$

Platí speciální případ vzorečku (1)

$$\pi_1(p, q) = \sum_{k,l} p_k q_l a_{kl} = p \cdot Aq$$
$$\pi_2(p, q) = \sum_{k,l} p_k q_l b_{kl} = p \cdot Bq$$

Hru tedy můžeme ztotožnit s dvojicí matic $(A, B)$. Hry dvou hráčů nazýváme proto také (dvou)maticové hry a prvního resp. druhého hráče nazýváme řádkový resp. sloupcový hráč.

Další speciální případy: $A^T = B$ je symetrická hra; je-li $A = A^T = B$, pak jde o dvojitě symetrickou hru. Pokud $A = -B$, tj. vlastně $\pi_2 = -\pi_1$, hovoříme o hře s nulovým součtem.

Hra s nulovým součtem je asi nejjednodušší případ hry. Tato hra je plně popsána maticí $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a předmětem hry je hodnota $p \cdot Aq$ – pro prvního hráče zisk, který se snaží maximizovat, pro druhého hráče ztráta, kterou minimalizuje.

**Definice.** Pro hru s nulovým součtem matice $A$ definujeme: $v_1(p) = \min_q p \cdot Aq$ a $v_1(A) = \sup v_1(p)$ hodnotu strategie $p$ a hodnotu hry prvního hráče. Názorně: minimální zaručený zisk při strategii $p$ a největší vynutitelný zisk celé hry.
Analogicky definujeme $v_2(q) = \max_p p \cdot Aq$ a $v_2(A) = \inf v_2(q)$ hodnotu strategie $q$ a hodnotu hry druhého hráče, tedy maximální možnou ztrátu při strategii $q$ a minimální ztrátu přes všechny strategie.
Dále řekneme, že $p^*$ je optimální strategie prvního hráče, jestliže $v_1(p^*) = v_1(A)$. Podobně $q^*$ je optimální strategie druhého hráče, jestliže $v_2(q^*) = v_2(A)$. Tedy jde o strategii, která hráči zaručí hodnotu hry – její existence není a priori jasná.
Je intuitivně jasné (a triviální dokázat), že $v_1(A) \le v_2(A)$. Důkaz rovnosti obou veličin je prvním historicky důležitým výsledkem teorie her: tzv. minimaxová věta (J. von Neumann, 1928).

**Věta 2.** Nechť $A$ je hra s nulovým součtem. Potom:

1. $v_1(A) = v_2(A)$
2. dvojice strategií $(p^*, q^*)$ tvoří N.e. hry $(A, -A)$, právě když $p^*$ je optimální pro prvního hráče a zároveň $q^*$ je optimální pro druhého hráče.

**Poznámky.** Dosud jsme hovořili o hrách v normálním tvaru. Hry v extenzivním tvaru: stromová struktura, hráči se střídají v tazích, jsou možné i náhodné tahy, neúplná informace (šachy, piškvorky, mariáš, ...).

Hru v extenzivním tvaru lze formálně zapsat jako hru v normálním tvaru: strategií je zde pravidlo, určující chování hráče v libovolném uzlu (bez ohledu na to, zda jím hra projde či ne). Zpětnou indukcí lze dokázat, že každá hrá v extenzivním (s úplnou informací) tvaru má N.e. dokonce v čistých strategiích.
Speciálně odsud plyne Zermelova šachová věta (Zermelo 1914), podle níž buď bílý má vítěznou strategii, nebo černý má vítěznou strategii, nebo každý z hráčů může vynutit remízu.

**Poznámky.** Přejdeme nyní k populačně-dynamickým otázkám. Nadále budeme uvažovat pouze symetrickou hru, určenou výplatní funkcí $\pi(x, y) = x \cdot Ay$, kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Vektor $x \in \Delta$, kde $\Delta$ je $n-1$-dimezionální simplex, bude reprezentovat populaci, v níž je $x_i$ podíl zastoupení $i$-té strategie. Předchozí definice („nosič“, „nejlepší odpověď“) zůstávají v platnosti:

$$C(x) = \{i;\ x_i > 0\}$$
$$\beta(x) = \{y \in \Delta;\ \pi(y, x) = \sup_y \pi(y, x)\}$$

Speciálním případem předchozí definice pak je:

**Definice.** Řekneme, že populace $x \in \Delta$ tvoří Nashovo ekvilibrium (NE), jestliže $x \in \beta(x)$, tj. $\pi(x, x) = \sup_{y\in\Delta} \pi(y, x)$.

**Poznámky.** Zřejmě $x$ je NE právě když $\pi(e^{(i)}, x) \le \pi(x, x)$ pro každé $i$. Navíc (dle Lemmatu 1) $\pi(e^{(i)}, x) = \pi(x, x)$ pro každé $i \in C(x)$.
Modifikací Věty 1 dostaneme lehce, že vždy existuje stav populace, který tvoří NE. Potíž však je v tom, že NE je obvykle příliš mnoho. Existuje mnoho různých zpřísnění pojmu NE; jedním z nejdůležitějších pro populační dynamiku je:

**Definice.** Řekneme, že $x \in \Delta$ je evolučně stabilní strategie (ESS), jestliže platí:

$$\big(\forall y \in \Delta, y \ne x\big)\big(\exists \overline{\varepsilon}_y > 0\big)\big(\forall \varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}_y)\big) :\ \pi(x, (1-\varepsilon)x + \varepsilon y) > \pi(y, (1-\varepsilon)x + \varepsilon y)$$

Číslo $\overline{\varepsilon}_y$ se nazývá invarzní bariéra a lze ukázat, že je můžeme volit nezávisle na $y \ne x$.

**Lemma 2.** Populace $x$ je ESS právě když $x$ je NE a navíc pro každé $y \in \beta(x)$, $y \ne x$ je $\pi(y, y) < \pi(x, y)$.

**Poznámky.** Nyní budeme uvažovat, že $x = x(t)$ a chceme napsat rovnice pro příslušnou populační dynamiku. Je rozumné uvažovat tvar

$$x_i' = x_i g_i(x) \tag{2}$$

kde funkce $g_i : \Delta \to \mathbb{R}$ splňují

- $\sum_i x_i g_i(x) = 0$ pro $\forall x \in \Delta$
- $\operatorname{sgn} g_i(x) = \operatorname{sgn} \big(\pi_i(x) - \pi(x)\big)$

tzv. požadavek regularity resp. výplatní monotonie. Zde a nadále pro jednoduchost píšeme průměrný zisk $i$-tého hráče resp. průměrný zisk celé populace jako

$$\pi_i(x) = \pi(e^{(i)}, x)$$
$$\pi(x) = \pi(x, x)$$

Nejjednoduší volbou je právě $g_i(x) = \pi_i(x) - \pi(x)$, která vede na tzv. replikátorovou rovnici

$$x_i' = x_i\big(\pi_i(x) - \pi(x)\big) \tag{3}$$

Tou se budeme nadále zabývat, ale je vhodné poznamenat, že mnohé následující výsledky platí obecněji pro každou rovnici (2), splňující výše uvedené předpoklady.

**Věta 3.** Pro každé $\tilde{x} \in \Delta$ existuje jediné $t \mapsto x(t) \in \Delta$, řešení (3), definované pro všechna $t \in \mathbb{R}$, s počáteční podmínkou $x(0) = \tilde{x}$.
Pro toto řešení dále platí: $C(x(t)) = C(\tilde{x})$ pro všechna $t$; speciálně vnitřek a hranice $\Delta$ jsou invariantní vzhledem k řešení (3).

**Věta 4.** Pro dynamiku replikátorové rovnice (3) platí:

1. $\tilde{x}$ je NE $\implies$ $\tilde{x}$ je stacionární bod
2. $\tilde{x}$ je stabilní stacionární bod $\implies$ $\tilde{x}$ je NE
3. $\tilde{x}$ je limitou řešení ležícího *uvnitř* $\Delta \implies \tilde{x}$ je NE

**Věta 5.** Pro dynamiku replikátorové rovnice platí: pokud $\tilde{x}$ je ESS, pak $\tilde{x}$ je asymptoticky stabilní stacionární bod.

**Poznámky.** Důkaz se opírá o Ljapunovskou funkci $V(x) = \sum_{i \in C(\tilde{x})} \tilde{x}_i \ln \tilde{x}_i / x_i$. Obrácené tvrzení neplatí: matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

generuje RD se dvěma asympt. stabilními stac. body: $a = (1, 0, 0)$, $b = (1/3, 1/3, 1/3)$, přičemž $b$ není ESS.

**Věta 6.** [Základní věta přírodního výběru.] Nechť matice $A$ je symetrická. Potom pro RD platí $\frac{d}{dt}\pi(x(t)) \geq 0$, přičemž rovnost nastává pouze ve stacionárním bodě.

**Poznámka.** Již jednoduchý příklad hry ,,jestřábi-hrdličky“ ukazuje, že bez předpokladu symetrie uvedený závěr platit nemusí.

**Odvození RD.** Replikátorovou dynamiku jsme výše zavedli axiomaticky, tj. jako nejjednodušší model, splňující jisté rozumné předpoklady. Nyní si ukážeme podrobnější odvození, které navíc umožní model zobecnit zahrnutím i efektu mutací.
(I) Případ bez mutací. Označme $p_i = p_i(t)$ absolutní velikost $i$-té populace, tj. $x_i = p_i/p$, kde $p = \sum_i p_i$. Pokud čas by byl diskrétní, tj. $t = 0, 1, 2, \ldots$, postulujeme dynamiku

$$p_i(t+1) = (1 + r_i) p_i(t)$$

kde $r_i$ je koeficient růstu. Ke spojitému případu přejdeme ,,interpolační“ úvahou

$$p_i(t + \delta) = \delta p_i(t+1) + (1 - \delta) p_i(t)$$

odtud pak vyjádříme a zlimitíme $\delta \to 0+$

$$\frac{p_i(t+\delta) - p_i(t)}{\delta} = r_i p_i(t)$$
$$p_i'(t) = r_i p_i(t)$$

Pokud budeme dále předpokládat, že $r_i = \alpha - \beta + c\pi_i(x)$, kde $\alpha$, $\beta$ je přirozená míra porodnosti/úmrtnosti a $c > 0$ je konstanta úměrnosti mezi reprodukcí a zdatností, pak rutinní výpočet dává

$$x_i' = \left(\frac{p_i}{p}\right)' = \cdots = c(\pi_i(x) - \pi(x))$$

Tedy RD nezávisí na $\alpha$, $\beta$ a možno položit BÚNO $c = 1$.

(II) Případ s mutacemi. Předpokládejme, že existuje ,,mutační matice“ $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, jejíž složka $\mu_{ij} \geq 0$ udává pravděpodobnost mutace $j \to i$ za jednotku času. Tedy

$$p_i\left(1 - \sum_{j=1}^{n} \mu_{ji}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\mu_{ij}p_j - \mu_{ji}p_i\right)$$

je počet nemutujících členů $i$-té populace resp. bilanci mutací $i$-té populace za jednotku času. Pro diskrétní čas potom máme

$$p_i(t+1) = p_i(t) + r_i p_i(t)\left(1 - \sum_{j=1}^{n} \mu_{ji}\right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\mu_{ij}p_j - \mu_{ji}p_i\right)$$

Interpolací a limitou pak máme spojitý model

$$p_i' = r_i p_i\left(1 - \sum_{j=1}^{n} \mu_{ji}\right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\mu_{ij}p_j - \mu_{ji}p_i\right)$$

a odtud potom zobecněnou RD ve tvaru

$$x_i' = r_i x_i\big(1 - \sum_{j=1}^{n} \mu_{ji}\big) + \sum_{j=1}^{n} \left(\mu_{ij}x_j - \mu_{ji}x_i\right) - x_i \sum_{k} r_k x_k \big(1 - \sum_{j} \mu_{kj}\big)$$

Nadále se omezíme na zjednodušený model rovnoměrných mutací, tj. $\mu_{ij} = \theta/n$, kde $\theta > 0$ je malé. Navíc položíme jako výše $r_i = \gamma + \pi_i(x)$. Tak konečně dostáváme

$$x_i' = (1-\theta)x_i(\pi_i(x) - \pi(x)) + \theta(n^{-1} - x_i) \tag{4}$$

Pro tuto rovnici pak snadno odvodíme variantu existenční věty:

**Věta 3'.** Pro každé $\tilde{x} \in \Delta$ existuje jediné $t \mapsto x(t) \in \Delta$, řešení (4), definované pro všechna $t \geq 0$, s počáteční podmínkou $x(0) = \tilde{x}$.
Toto řešení se nachází striktně uvnitř $\Delta$ pro všechna $t > 0$.

**Příklad.** *Vězňovo dilema s opakováním.* Základní hru vězňova dilematu pro strategie $a$ vs. $z$, tj.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

obohatíme o možnost opakování hry (s pravděpodobností $p$) a doplníme strategii $o$ (oplácející či odpouštějící strategie). Dostáváme hru

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 4(1-p) \\ 2 & p-1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zvolíme dále pro jednoduchost $p = 3/4$ a hru normalizujeme, tj. máme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Položíme pro jednoduchost $x = x_1$ (altruisté), $y = x_3$ (oplácející), rovnici pro $x_2 = 1 - x - y$ nemusíme uvažovat. To dává systém

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{4}x(1-x-y)(5y-4x-4) \\ y' &= \frac{1}{4}y(1-x-y)(5y-4x-1) \end{aligned}$$

Elementární analýza dává, že všechna řešení buď skončí v počátku (vítězí zrádci), nebo na spojnici $a - o$, tj. určitá kombinace altruistických strategií.

**Příklad.** *Vězňovo dilema s opakováním a mutacemi.* Jde nyní o model

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1-\theta}{4}x(1-x-y)(5y-4x-4) + \theta(\frac{1}{3} - x) \\ y' &= \frac{1-\theta}{4}y(1-x-y)(5y-4x-1) + \theta(\frac{1}{3} - y) \end{aligned}$$

**Poznámka.** Snadno si rozmyslíme, že pokud přičteme k celému sloupci matice $A$ totéž číslo, nemění se hodnota $\pi(x - \tilde{x}, y)$. Tedy se nemění pojmy NE, ESS a ani tvar rovnic RD resp. RD s mutacemi. Tuto ,,normalizaci hry" budeme zpravidla BÚNO provádět.

**Lemma 3.** Pro rovnice RD platí:

1. $\tilde{x} \in \operatorname{int}\Delta$ je stacionární bod, právě když $\pi_i(\tilde{x})$ nezávisí na $i$.
2. pokud $\tilde{x}, \tilde{y} \in \operatorname{int}\Delta$ jsou stacionární, pak je stacionární také konvexní kombinace $t\tilde{x} + (1-t)\tilde{y}$, $t \in (0, 1)$.
3. pokud $\operatorname{int}\Delta$ obsahuje periodický orbit, obsahuje též stacionární bod

**Věta 7.** Označme $u = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Pokud složky $(\operatorname{adj} A)u$ nejsou téhož znamení, pak rovnice RD nemá ve vnitřku $\Delta$ stacionární body ani periodické orbity.

**Poznámka.** Připomeňme, že $\operatorname{adj} A$ je matice se složkami $(-1)^{i+j}M_{ji}$, kde $M_{ij}$ je subdeterminant vzniklý vynecháním $i$-tého řádku a $j$-tého sloupce. Platí $A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = (\det A)I$.
Pro účely předchozí věty rozlišujeme tři různá znamení: 0, +1, -1.

**Příklad.** *Zobecnění HD-hry ,,hrdličky-jestřábi".* Hru obohatíme o dvě podmíněné strategie: křikloun (B-bully), který předstírá agresi, ale před odhodlaným soupeřem uteče, a odvetník (R-retaliator), který se naopak chová mírumilovně, ale s útočníkem bojuje. Výplatní matice této hry má tedy tvar (vzhledem ke složkám HDBR):

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Vycházíme z hodnot: vítězství = 6, kapitulace = 0, prohra v boji = -10, ztracený čas = -1. Uvedená dynamika není robustní (má nehyperbolické stacionární body), alternativně: náhodné mutaci mohou vést ke složité cyklické dynamice.
Stabilizace hry: přičteme matice

$$\begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{respektive} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ -\delta & 0 \end{pmatrix}$$

ke hrám DR respektive HR, tj. půjde o mírné zvýhodnění odvetníka vůči hrdličce resp. znevýhodnění vůči jestřábovi.

*verze dne 27. května 2017.*