Zajímavé příklady z teorie her

Dalibor Pražák, KMA MFF UK

1. Úvod

Z matematického hlediska je ,,hra" strategická či potenciálně konfliktní situace, kde zisk či ztráta každého jednotlivého aktéra (,,hráče") závisí nejen na jeho vlastním chování (,,strategii"), nýbrž i na volbě strategie ostatních hráčů, které nemůže ovlivnit.
Poznamenejme, že ,,hra" či ,,strategie" je nadále terminus technicus, tj. pojem, jehož význam je implicitně určen níže uvedenou definicí, a který tedy nemá mít obvyklý emociálně zabarvený význam (hra jako něco lehkovážného, zábavného).
Studium teorie her z nás nedělá lepší hráče, tj. nenaučí nás vítězit v určité konkrétní hře (nejvýše nás může poučit, jak neprohrát). Užitek plynoucí z teorie her je na vyšší úrovni: umožní nám konfliktní situace analyzovat a rozumět jim. Předvídá, jak se změní chování hráčů v důsledku určité změny pravidel. Teorie her je tedy užitečná pro toho, kdy nějakou ,,hru" vytváří, tj. například organizuje, stanovuje pravidla pro nějakou činnost s účelem přimět její účastníky (,,hráče") k určitému chování.

2. Základní pojmy a příklady

Definice. Obecná hra (se dvěma hráči) je zadána množinami strategií $\mathscr{S}_1$ respektive $\mathscr{S}_2$ pro prvního respektive druhého hráče, a dále výplatními funkcemi $\varphi_1 = \varphi_1(S_1, S_2)$ a $\varphi_2 = \varphi_2(S_1, S_2)$, které udávají zisk prvního a druhého hráče, na základě jimi zvolených strategií $S_1 \in \mathscr{S}_1$ a $S_2 \in \mathscr{S}_2$.
Pokud je $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_2$ a $\varphi_1 = \varphi_2$, hovoříme o symetrické hře.

Jak se taková matematická hra hraje? Můžeme si představit, že každý z hráčů zvolí svou strategii, přičemž neví, jakou strategii zvolí soupeř. Výplatní funkce potom říkají, jak který hráč ve hře dopadl. Na příkladech uvidíme, že mnohé reálné situace odpovídají právě takovémuto matematickému pojetí hry.

Příklad. Známá hra ,,kámen-nůžky-papír" je příkladem symetrické hry se dvěma hráči. Máme zde množinu tří strategií $\mathscr{S} = \{K, N, P\}$ a výplatní funkci, kterou nejlépe popíšeme v následující tabulce (tzv. ,,výplatní matice"):

	K	N	P
K	0	1	-1
N	-1	0	1
P	1	-1	0

Matice zobrazuje zisky prvního hráče, řádky respektive sloupce odpovídají strategii prvního respektive druhého hráče.

Příklad. Revizor vs. cestující – nesymetrická hra se dvěma hráči. Hráč 1 („cestující“) si buď koupí lístek, nebo jede načerno, tj. $\mathscr{S}_1 = \{L, \check{C}\}$. Hráč 2 („revizor“) cestujícího buď kontroluje, nebo nekontroluje, tj. $\mathscr{S}_2 = \{K, N\}$. Předpokládejme, že cena lístku je 30, pokuta za jízdu načerno 1000. Kontrola cestujícího jsou pevné náklady pro revizora v hodnotě 10 a dopadení černého pasažéra bonus 100. Výplatní funkce zapíšeme opět do matice. Řádky odpovídají strategiím cestujícího, sloupce strategiím revizora. Obě výplatní funkce zapíšeme do jedné matice tak, že nad lomítkem respektive pod lomítkem píšeme zisky cestujícího respektive zisky revizora, tj. prvky matice mají tvar ${}^{\varphi_1}/_{\varphi_2}$:

	K	N
L	${}^{-30}/_{-10}$	${}^{-30}/_{0}$
Č	${}^{-1000}/_{90}$	${}^{0}/_{0}$

Klíčovým pojmem pro nás bude *Nashovo ekvilibrium*, zkracujeme N.e.

Definice. Nashovým ekvilibriem rozumíme takovou volbu strategií jednotlivými hráči, že žádný z nich si nemůže zvýšit svůj zisk pouze změnou vlastní strategie, tj. za předpokladu, že soupeř svou strategii nemění.
Matematicky zapsáno je N.e. dvojice (S_1, S_2), kde $S_1 \in \mathscr{S}_1$, $S_2 \in \mathscr{S}_2$, a jsou splněny podmínky

$$\begin{aligned} \varphi_1(X, S_2) &\le \varphi_1(S_1, S_2) \qquad \text{pro každé } X \in \mathscr{S}_1 \\ \varphi_2(S_1, Y) &\le \varphi_2(S_1, S_2) \qquad \text{pro každé } Y \in \mathscr{S}_2 \end{aligned}$$

Proč se jedná o dobrý pojem ekvilibria (stacionárního bodu)? Představme si, že hra probíhá opakovaně. Pokud strategie zvolené jednotlivými hráči netvoří N.e., alespoň jeden z hráčů vidí, že by na tom byl lépe, kdyby zahrál něco jiného. Bude mít tedy tendenci v dalším kole svou strategii měnit.
Naopak v situaci N.e. si žádný z hráčů sám polepšit nemůže; protože strategie ostatních hráčů nemůže měnit ani předvídat, hra bude nejspíše stejná i v dalším kole.
V následujícím se podíváme na výpočet N.e. pro výše uvedené hry a též pro některé další příklady. Upřesníme pojem opakování hry. Ukážeme si, že N.e. dobře odpovídá našemu intuitivnímu náhledu na hru a její výsledek.

Příklad. Žádná kombinace strategií ve hře „kámen-nůžky-papír“ netvoří N.e., neboť vždy existuje alespoň jeden hráč, který si může polepšit volbou jiné strategie. Například v situaci (N, P) má druhý hráč zisk -1; pokud by býval zahrál K, získal by 1. V situaci (K, K) si kterýkoliv hráč polepší, zahraje-li raději P. Atd.
Pokud připustíme také pravděpodobnostní („smíšené“) stragie, tj. možnost, že s určitou pravděpodobností zahraji K, N nebo P, pak lze ukázat, že jediným N.e. je rovnoměrná strategie $({}^1/_3, {}^1/_3, {}^1/_3)$.

Příklad. Ani ve hře „cestující vs. revizor“ neexistuje N.e. V situaci (L, K) revizor zjišťuje, že zbytečně vydal 10, bylo by lépe volit strategii N. Ovšem situace (L, N) zase není optimální pro cestujícího, který mohl ušetřit 30. Atd.
Hru lze opět zobecnit tak, že uvažujeme smíšené strategie, kdy s pravděpodobností α si koupíme lístek a s pravděpodobností $1 - \alpha$ jedeme načerno. Podobně revizor kontroluje s pravděpodobností β, zatímco v $1 - \beta$ případech nikoliv. V takovém případě lze spočítat, že existuje jediné N.e. Platí následující obecné tvrzení (jehož důkaz uvádíme na konci textu).

Tvrzení 1. Je dána hra cestující-revizor, kde L je cena lístku, P je pokuta, N jsou náklady na kontrolu cestujícího a B je bonus za chycení černého pasažéra. Potom ve smíšených strategiích existuje jediné N.e. $\alpha = 1 - {}^{N}/_{B}$, $\beta = {}^{L}/_{P}$.

Poznamenejme dvě věci: ve výše uvedeném případě jsme volili $L = 30$, $P = 1000$, $N = 10$ a $B = 100$, čemuž odpovídá N.e. $(\alpha, \beta) = ({}^{9}/_{10}, {}^{3}/_{100})$. To znamená, že v rovnovážném stavu jede načerno desetina cestujících, a že cestující je kontrolován ve třech případech na sto jízd. To lze považovat (s ohledem na jednoduchost našeho modelu) za dobrou shodu se skutečným stavem řekněme v pražské MHD.
Na druhou stranu si všimněme, že z teorie vyplývá i závěr, který se zdá odporovat intuici: zvýšení pokuty P nezvýší počet poctivých cestujících, pouze sníží frekvenci kontrol. Chceme-li větší α, je třeba usnadnit práci revizora (buď zvýšením B, nebo snížením nákladů na kontrolu N).

3. Vězňovo dilema

„Vězňovo dilema“ je příkladem hry modelující dilema mezi altruistickým chováním (které je žádoucí, ale mohu na ně doplatit) a jednáním sobeckým (kterému chceme zamezit, ale bohužel se vyplácí). Originální příklad vězňova dilematu vychází ze specifické situace v americkém právním systému, kde tzv. „přiznání“ („plea deal“ – jedná se zde o terminus technicus par excellence) může znamenat mnohem nižší trest či dokonce propuštění pachatele na úkor spoluviníků, kteří nevypovídají (jsou v rámci této hry „altruističtí“).
Existuje mnoho jiných situací, které lze chápat jako „vězňovo dilema“; my si představíme následující příklad. Hráči obývají každý jeden byt společného domu. Dům je velmi dobře izolován zvenčí, ale zeď mezi oběma byty je silně teplovodná; tedy pokud budu topit, chtě nechtě vytápím i souseda. V noci je zima a hráč volí jednu z množiny strategií $\mathscr{S} = \{A, Z\}$, kde A značí, že zapnu své topení („altruistická“ strategie) a Z značí, že netopím („zrádná“ či „zimomřivá“ strategie). Výplatní funkce je odvozena jednak od tepelného komfortu u mě v bytě, jednak od účtu za topení. Předpokládejme, že teplo či zima odpovídá zisku 4 nebo 0, a že náklady na topení jsou 2, pokud soused topí též, ale 5, pokud vytápím sám celý dům. Je zřejmě $5 > 2 \cdot 2$, ovšem to lze vysvětlit přirozeně tak, že vytápění jenom z jednoho přístroje je méně efektivní a tudíž více než dvakrát nákladnější.
Jedná se o symetrickou hru a snadno dopočteme, že výplatní matice vypadá následovně:

	A	Z
A	2	-1
Z	4	0

Matici opět chápeme tak, že zobrazuje zisky prvního hráče, tj. hodnotu φ_1, přičemž řádky respektive sloupce odpovídají strategiím prvního respektive druhého hráče.
Jak vypadá analýza hry? Snadno si rozmyslíme, že (Z, Z) je Nashovo ekvilibrium, a je to bohužel jediné N.e. této hry – v každé jiné kombinaci strategií (A, A), (A, Z) a (Z, A) je totiž pro každého z hráčů výhodnější přejít od A k Z. To je závěr, který se nám nelíbí: teorie předvídá, že v domě bude zima.
Všimněme si ještě jedné věci: v každém z případů (A, A), (A, Z) a (Z, A) je v domě teplo, avšak první z nich je nejlepší v tom smyslu, že celkový zisk je nejvyšší: $2 + 2 = 4$. Pokud topí jen jeden hráč, je celkový zisk jen $4 - 1 = 3$. To lze chápat jako čistě ekonomický důvod, proč

je altruismus výhodný: altruistická společenství jsou na tom lépe jako celek, ekvivalentně, mají vyšší průměrné zisky jednotlivců.
Klíčová otázka tedy zní, jak docílit přesunu ze (Z, Z) do bohužel nestabilního stavu (A, A)? V reálné situaci si lze představit různé možnosti (úředník dohlížející, že řádně topíme; změna výplatních funkcí, beroucí v potaz sdílení tepla, ...). My si však ukážeme, že altruistické chování lze docílit mnohem snazší modifikací hry: prostým jejím opakováním.

Budeme předpokládat, že existuje číslo p mezi 0 a 1 takové, které určuje pravděpodobnost dalšího kola hry, tj. hraju jedno kolo a s pravděpodobností $1-p$ poté skončím, zatímco s pravděpodobností p se situace opakuje: hraji jedno kolo, poté s pravděpodobností $1-p$ skončím, s pravděpodobností p se vše opakuje .... Jaká bude celková (průměrná) délka hry L? Z uvedeného zřejmě plyne

$$L = 1 + p(1 + p(1 + \dots)\dots) = 1 + p + p^2 + p^3 + \dots = \frac{1}{1-p} \tag{1}$$

díky známému vzorečku pro součet geometrické řady. To znamená mnohem komplexnější množinu možných strategií: stále sice nevím, jak bude hrát soupeř v příštím kole, znám však a beru v úvahu jeho minulé strategie. Významné příklady strategií pro opakované vězňovo dilema:

- $^*A$ skalní altruista: volí A v každém kole bez ohledu na chování soupeře
- $^*Z$ zatvrzelý zrádce: volí Z v každém kole bez ohledu na chování soupeře
- N nedůvěřivá strategie: hraji A, ovšem pouze tak dlouho, dokud soupeř poprvé nezahraje Z – pak již hraji stále jen Z
- O odpouštějící (nebo oplácející) strategie: hraji A v prvním kole, a pak hraji vždy to, co soupeř v předchozím kole

Jak bude vypadat výplatní funkce, tj. jaké budou zisky těchto strategií v průběhu hry? Zkusme vyjádřit $\varphi(^*A, ^*A)$. Oba hráči volí stále A, tedy zisk (prvního hráče) v každém kole je 2. Ovšem další kola následují pouze s pravděpodobností p; očekávaný průměrný zisk bude tedy

$$\varphi(^*A, ^*A) = 2 + p(2 + p(2 + \dots)\dots) = 2 + 2p^2 + 2p^3 + \dots = \frac{2}{1-p} \tag{2}$$

Jak budou vypadat Nashova ekvilibria pro opakované vězňovo dilema? Ukažme si nejprve následující snadné tvrzení.

Tvrzení. Volba $(^*Z, ^*Z)$ je N.e.
Důkaz. Potřebujeme ukázat, že žádný hráč si nemůže polepšit změnou vlastní strategie. Vzhledem k symetrii hry to stačí ukázat pro prvního hráče. Tedy budeme dokazovat, že

$$\varphi(X, ^*Z) \leq \varphi(^*Z, ^*Z),$$

kde X je zcela libovolná strategie. Na prvé straně nerovnosti je zřejmě nula, neboť oba hráči hrají stále Z a tedy získají v každém kole (pokud se ovšem bude hrát), čistou nulu. Na druhou stranu, ať je X založena na jakémkoliv principu, první hráč bude hrát v jednotlivém kole buď A a získá -1, nebo Z a získá 0, neboť soupeř při $^*Z$ hraje stále Z. Je tedy $\varphi(X, ^*Z) \leq 0$ a důkaz je hotov. $\square$

Tím to však nekončí, neboť Nashových ekvilibrií může být v této hře více než jedno! Jmenovitě platí následující tvrzení.

Tvrzení 2. Je-li $p \geq {}^1\!/_2$, tvoří nedůvěřivé strategie (N, N) též Nashovo ekvilibrium. Je-li dokonce $p \geq {}^2\!/_3$, tvoří také odpouštějící strategie (O, O) Nashovo ekvilibrium.

Důkazy těchto tvrzení uvádíme na konci textu; není však obtížné pochopit je intuitivně. Hraji-li například N a soupeř také N, trvá v každém kole spolupráce a každý získává 2. Pokud se řekněme první hráč řídí alternativní strategií X a v nějakém kole zahraje Z, získá 4, což je sice více než 2, ale na druhou stranu přijde o všechny následující zisky: soupeř už bude hrát vždy jen Z, čímž mu nedovolí zisk větší než 0 po zbytek hry. Je-li p dosti velké, je pravděpodobná hodnota těchto ztrát větší než jednorázová výhoda 4 proti 2.

4. Důkaz Tvrzení 1

Uvažujeme hru „cestující – revizor" s obecnými hodnotami L (cena lístku), P (pokuta za jízdu načerno), N (náklady revizora na kontrolue cestujícího) a B (bonus za chycení černého pasažéra). Smíšené strategie jsou popsány dvojicí čísel (α, β) ležících mezi 0 a 1, kde α je pravděpodobnost, že si koupím lístek, a β je pravděpodobnost, že mě revizor bude kontrolovat. Smíšené strategie si lze možná názorněji představit tak, že máme veliké množství cestujících, z nichž podíl α vždy má lístek, zatímco podíl $1-\alpha$ jede vždy bez lístku. Naproti tomu revizoři kontrolují podíl β cestujících, zatímco podíl $1-\beta$ nekotrolují (ať již proto, že je nepotkají, nebo je nechají projít).
Jak vypadají zisky strategií v této obecnější situaci? Pokud si koupím lístek, můj zisk je $-L$, bez ohledu na to, jsem-li kontrolován. Jedu-li načerno, pak v β případech platím P, v ostatních neplatím nic, tedy můj zisk je $\beta \cdot (-P) + (1-\beta) \cdot 0 = -\beta P$. Klíčová úvaha: N.e. požaduje, že cestující si nemůže polepšit změnou své strategie, což bude nastávat právě tehdy, pokud cesta s lístkem a cesta bez lístku je v průměru stejně nákladná, neboli $-L = -\beta P$. Odtud dostáváme první podmínku $\beta = {}^L\!/_P$.

Z hlediska revizora je úvaha analogická: pokud kontroluje, vydá vždy náklad N, k tomu v α případech má před sebou poctivého cestujícího a nezíská nic, zatímco v $1-\alpha$ případech je tu černý pasažér a revizor získává B. Tedy kontrola v průměru vynáší $-N + \alpha \cdot 0 + (1-\alpha)B = (1-\alpha)B - N$. Alternativní strategie (revizor nekontroluje) dává vždy nulový zisk. Tyto strategie se vyrovnají, právě když $(1-\alpha)B - N = 0$, což dává druhou podmínku $\beta = 1 - {}^N\!/_B$. Důkaz je hotov.

5. Důkaz Tvrzení 2

Rozmysleme si nejprve, jak vypadá vzoreček pro $\varphi(X, Y)$ v případě nějakých obecných strategií X a Y. Můžeme předpokládat, že tyto strategie určují chování hráčů v každém kole (bez ohledu na to, zda se skutečně bude hrát nebo ne). Nechť a_1, a_2, …je zisk prvního hráče v prvním, druhém atd. kole. Potom zřejmě, s ohledem na roli čísla p, máme

$$\varphi(X, Y) = a_1 + p(a_2 + p(a_3 + \dots)\dots) = a_1 + pa_2 + p^2 a_3 + \dots \tag{3}$$

Na tento vzoreček lze hledět takto: první kolo se hraje jistě, druhé kolo s pravděpodobností p, třetí kolo s pravděpodobností p^2 a tak dále. Při výpočtu celkového zisku tedy musíme

očekávané zisky v jednotlivých kolech násobit pravděpodobností, že příslušné kolo se bude hrát, abychom vzali v potaz situaci, že k tomuto kolu vůbec nedojde.
A nyní už k vlastnímu důkazu. V první části chceme dokázat, že pro $p \geq {}^1/_2$ je volba strategií (N, N) Nashovo equilibrium, tj. platí

$$\varphi(X, N) \leq \varphi(N, N) \tag{4}$$

pro libovolnou alternativní strategii X. Ovšem řídí-li se oba hráči strategií N, hrají v každém kole A, tedy zisk prvního hráče $a_i = 2$ pro každé $i = 1, 2, \ldots$. Odtud tedy dle vzorečku (3) je na pravé straně nerovnosti

$$\varphi(N, N) = 2 + p2 + p^2 2 + \ldots \tag{5}$$

Nechť X je libovolná strategie. Rozlišíme dvě možnosti: pokud bude hráč stále volit A, je jeho zisk v každém kole 2 a tedy $\varphi(X, N) = \varphi(N, N)$, tedy nerovnost (4) platí.
Předpokládejme, že strategie X vede hráče k tomu, že alespoň jednou zradí; označme jako k číslo kola, v němž dojde k první zradě. Co nyní víme o chování oponenta, který hraje strategii N? Až do k-tého kola včetně hraje A, počínaje $(k+1)$-kolem pak stále Z. Co víme o hodnotě a_i, udávající zisk prvního hráče v i-tém kole? Z uvedeného plyne, že $a_i = 2$ pro $i = 1, \ldots, k-1$, $a_k = 4$ a pro $i \geq k+1$ je a_i rovno buď 0 nebo -1 – podle toho, hraje-li první hráč Z nebo A. V každém případě však $a_i \leq 0$ pro $i \geq k+1$. Naše poznatky shrneme do následující tabulky:

číslo kola i	1	…	…	k	$k+1$	…
1. hráč (strategie X)	A	…	A	Z	?	?
2. hráč (strategie N)	A	…	A	A	Z	Z
zisk prvního hráče a_i	2	…	2	4	≤ 0	≤ 0
relativní výhoda	0	…	0	2	≤ -2	≤ -2

V posledním řádku zaznamenáme, o kolik si hráč se strategií X polepší vzhledem k situaci, kdy stále spolupracuje. Protože v takovém případě by jeho zisk byl vždy 2, stačilo odečíst tuto konstantu od předchozího řádku. Celkovou výhodu strategie X proti N, což není nic jiného než rozdíl $\varphi(X, N) - \varphi(N, N)$, pak jednoduše získáme sečtením posledního řádku, po přinásobení příslušnými pravděpodobnostmi:

$$\varphi(X, N) - \varphi(N, N) \leq p^{k-1}2 + p^k(-2) + p^{k+1}(-2) + \ldots$$

Ukážeme, že výraz napravo je menší roven nule, čímž dostaneme (4). Pravá strana je však menší nebo rovna nule, právě když

$$\begin{aligned}
p^{k-1}2 &\leq p^k 2 + p^{k+1}2 + \ldots \\
p^{k-1}2 &\leq p^k(2 + p2 + p^2 2 + \ldots) \\
p^{k-1}2 &\leq p^k \frac{2}{1-p} \\
1 &\leq \frac{p}{1-p} \\
1 - p &\leq p \\
1 &\leq 2p
\end{aligned}$$

Sérií snadných ekvivalentních úprav (užili jsme opět vzoreček pro součet geometrické řady) dospíváme k původně předpokládané nerovnosti $p \geq {}^1/_2$. První část důkazu je hotova.

Ve druhé části tvrdíme, že pokud $\delta \geq {}^2\!/_3$, pak též odpouštějící strategie (O, O) tvoří Nashovo equilibrium. Tvrdíme tedy, že

$$\varphi(X, O) \leq \varphi(O, O) \tag{6}$$

pro libovolnou jinou strategii X. Opět pozorujeme, že řídí-li se oba hráči strategií O, trvá spolupráce v každém kole, a tedy na pravé straně je výraz

$$\varphi(O, O) = 2 + p2 + p^2 2 + \dots \tag{7}$$

Při výpočtu $\varphi(X, O)$ rozlišíme několik případů. Pokud hráč s touto strategií nezradí nikdy, nastává opět v každém kole spolupráce, tedy v (6) máme rovnost. Pokud hráč v nějakém kole zradí a poté už hraje vždy zradu, je odezva strategie O stejná jako odezva strategie N, tedy $\varphi(X, O) = \varphi(X, N)$. To je však menší nebo rovno než zisk při trvalé spolupráci, což bylo dokázáno v první části za slabšího předpokladu $\delta \geq {}^1\!/_2$.
Zbývá tedy vyšetřit případ, že hráč X opakovaně přechází mezi zradou a spoluprací. Uvažme, že stačí porovnat pouze jeden úsek hry, kdy se přejde mezi spoluprací a zradou a zase zpět. Ukážeme-li, že zisk v tomto úseku je menší nebo roven než zisku při trvalé spolupráci, jsme hotovi, neboť následující úseky hry se porovnají analogicky.
Předpokládejme tedy, že hráč volí opakovaně A, v k-tém změní strategii na Z a posléze v n-tém kole zahraje poprvé zase A. Obecně je $k \geq 1$ a $n > k$. Uvědomme si, že strategie O druhého hráče reaguje opožděně, tj. hraje A ještě v k-tém kole, a hraje Z od $k+1$ do n-tého kola. Zapíšeme reakce strategie O a příslušné zisky prvního hráče opět v tabulce:

číslo kola i	1	...	...	k	...	...	n
1. hráč (strategie X)	A	...	A	Z	...	Z	A
2. hráč (strategie O)	A	...	A	A	Z	...	Z
zisk prvního hráče a_i	2	...	2	4	0		
relativní výhoda	0	...	0	2	-2	-2	-3

V posledním řádku opět zaznamenáme, o kolik si strategie X polepšila vůči trvalé spolupráci. A podobně jako výše máme tedy, uvažujeme-li teď pouze zisky od prvého do n-tého kola,

$$\varphi(X, O) - \varphi(O, O) = p^{k-1}2 + p^k(-2) + p^{k+1}(-2) + \cdots + p^{n-2}(-2) + p^{n-1}(-3)$$

a chceme ukázat, že tento výraz je menší nebo roven nule. To je zřejmě ekvivalentní nerovnostem

$$\begin{aligned} p^{k-1}2 &\leq p^k 2 + p^{k+1}2 + \cdots + p^{n-2}2 + p^{n-1}3 \\ 2 &\leq p2 + p^2 2 + \cdots + p^{n-k-1}2 + p^{n-k}3 \\ 4 &\leq 2 + p2 + p^2 2 + \cdots + p^{n-k-1}2 + p^{n-k}3 \\ 4 &\leq (1 + p + p^2 + \cdots + p^{m-1})2 + p^m 3 \end{aligned}$$

V posledním řádku jsme označili $m = n - k$, tedy $m \geq 1$. Užitím vzorečku pro částečný součet geometrické řady

$$1 + p + p^2 + \cdots + p^{m-1} = \frac{1 - p^m}{1 - p}$$

Dostáváme konečně

$$4 \leq 2\frac{1 - p^m}{1 - p} + 3p^m \tag{8}$$

kde jsme označili $m = n - k$; dle našich předpokladů je $m \geq 1$. Pro $m = 1$ jde o nerovnost $4 \leq 2 + 3p$, která je patrně ekvivalentní našemu předpokladu $p \geq {}^2/_3$. Upravíme-li ještě výraz na pravé straně (8) do tvaru

$$\frac{2}{1-p} + \frac{1-3p}{1-p}p^m$$

vidíme, že druhý zlomek je záporný, neboť $p \geq {}^1/_3$, a protože p^m se s rostoucím m zmenšuje, hodnota celého výrazu se bude zvětšovat. Platí-li tedy nerovnost (8) pro $m = 1$, platí i pro všechna m následující. Důkaz je hotov.