D.Ú.3 — k 10.4.2017

3.1. [Lemma 2(i).] Uvažujte úlohu

$$x'' + \Delta x' = -\overline{f}$$
$$x(0) = 0$$
$$x'(0) = v_0$$

kde v_0, $\overline{f} > 0$ jsou standardní a $\Delta > 0$ je nekonečně velké.
Spočítejte (s nekonečně malou chybou) nejmenší čas $t_1 > 0$ takový, že $x(t_1) = 0$, a též hodnotu $x'(t_1)$.

3.2.* [Lemma 2(ii).] Řešte týž problém pro úlohu

$$\begin{aligned} x'' + \Delta x' + k(x + x_0) &= 0 \\ x(0) &= 0 \\ x'(0) &= v_0 \end{aligned}$$

kde k, x_0 a $v_0 > 0$ jsou standardní.

3.3. [Lemma 4.] Je dána rovnice

$$\psi(t) = 0 \tag{1}$$

kde $\psi(t) : U(t_0, \delta) \to \mathbb{R}$, přičemž t_0, $\delta > 0$ jsou standardní. Předpokládejme, že existuje rozklad $\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)$, kde $\psi(t)$ jsou (internální) hladké funkce, splňující

- $\psi_1(t_0) = 0$, $\psi_1'(t_0) \not\approx 0$ na $U(t_0, \delta)$
- $\psi_2(t) \approx 0$, $\psi_2'(t) \approx 0$ na $U(t_0, \delta)$

Potom rovnice (1) má právě jedno řešení $\tilde{t}_0$ takové, že $\tilde{t}_0 \approx t_0$.

3.4. [Lemma 6.] Uvažujte úlohu

$$x'' + Lx = \overline{f}$$
$$x(0) = x_0$$
$$x'(0) = v_0$$

kde $L > 0$ je nekonečně velké, $x_0 \geq 0$, v_0 a $\overline{f}$ jsou standardní a platí, že $E_0 = v_0^2/2 + Lx_0^2/2$ není nekonečně malé.
Potom existují $t_1 \leq t_2$ nekonečně blízké 0 takové, že $x(t_1) = x(t_2) = 0$, $x(t) > 0$ na (t_1, t_2) a platí $x'(t_1) \approx \sqrt{2E_0} \approx -x'(t_2)$.
Viz nápověda druhé straně.

3.1. řešení lze vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Čas t_1 nejprve uhodnu zanedbáním nekonečně malých členů, postup pak mohu ospravedlnit Lemmatem X, úloha 3.3.

3.2. analogické předchozí situaci, kde kx_0 hraje roli $\overline{f}$ a vliv kx mohu zanedbat, neboť zůstává nekonečně malé.

3.3. elementární úvaha o monotonii.

3.4. 2. verze nápovědy: aplikuji tranformaci $\sqrt{L}x(t) = \tilde{x}(\sqrt{L}t)$, což vede na rovnici $\tilde{x}'' + \tilde{x} = \frac{\overline{f}}{\sqrt{L}}$, k níž příslušná energie $\tilde{E}(t) = \frac{1}{2}(\tilde{x}'(t))^2 + \frac{1}{2}(\tilde{x}(t))^2$ je rovna původní energii $E(t) = \frac{1}{2}(x'(t))^2 + \frac{L}{2}(x(t))^2$.

Řešení $\tilde{x}(t)$ vyjádřím a jeho nulové body pak najdu Lemmatem 4 (či příbuzným argumentem) – klíčový je fakt, že pravá strana rovnice je nyní nekonečně malá!