D.Ú.4 —

4.1. Dokažte Větu 2.

4.2. Nechť matice $\tilde{A}$ vznikne z matice A tak, že ke všem prvkům zvoleného sloupce j přičtu totéž číslo a. Ukažte, že příslušné (symetrické) hry jsou stejné v tom smyslu, že mají stejná NE i ESS a určují touž replikátorou rovnici.

4.3. Uvažujte zobecnění hry ,,kámen-nůžky-papír", tj. symetrickou hru určenou maticí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1+a & -1 \\ -1 & 0 & 1+a \\ 1+a & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

kde $a > -1$ je reálný parametr.

1. Ukažte, že hra má právě jedno NE a spočtěte je.
2. Vyjádřete průměrný zisk populace $\pi(x)$.
3. Napište rovnici replikátorové dynamiky.
4. Pomocí Ljapunovské funkce $h(x) = \ln(x_1 x_2 x_3)$ vyšetřete (asymptotickou) stabilitu NE.

Viz nápověda druhé straně.

4.1. 1. nerovnost $v_1(A) \leq v_2(A)$ již máme. Nechť (p^*, q^*) je NE (existenci máme zaručenu Větou 1). Potom z definice nejlepší odpovědi plyne, že $\pi(p^*, q^*) = v_1(p^*) = v_2(q^*)$; odtud pak $v_1(A) \geq v_2(A)$.

2. Z předchozí části již plyne, že pokud (p^*, q^*) je NE, pak $v_1(p^*) = v_2(q^*) = v(A)$. Obráceně, je-li $v_1(p^*) \geq v_1(A)$, dovoďte, že $p^* \in \beta(q)$ pro každé q.

4.2. Uvažte, co uvedená úprava udělá s výrazem $\pi(x, y) - \pi(\tilde{x}, y)$.

4.3.
- ukažte nejprve, že NE nemůže ležet ani ve vrcholu, ani na hraniční úsečce Δ. Užijte Lemma 1 k odvození rovnic pro vnitřní NE
- $\pi(x) = 1 + \frac{a}{2}(1 - |x|^2)$
- orbirální derivace $h(x)$ podél RD je $\dot{h}(x) = \frac{a}{2}(3|x|^2 - 1)$