1. Ekvivalence dynamických systémů.

Značení. V celé kapitole E je eukleidovský prostor $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}(E)$ je prostor lineárních zobrazení $T : E \to E$ a $\mathcal{GL}(E)$ je prostor lineárních invertovatelných (ekvivalentně prostých) zobrazení.

Definice. Dynamickým systémem (d.s.) rozumíme dvojici (φ, Ω), kde $\Omega \subset E$ a φ je zobrazení $\mathbb{R} \times \Omega$ do Ω, které je spojité a platí (i) $\varphi(0, x) = x$ a (ii) $\varphi(s, \varphi(t, x)) = \varphi(t + s, x)$ všude v daném definičním oboru.
Kanonický příklad: $(x_0, t) \mapsto x(t)$, kde $x = x(t)$ je řešení *autonomní* počáteční úlohy $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$. Je-li $f(\cdot) : \Omega \to E$ lokálně lipschitzovská a $\Omega \subset E$ otevřená, je příslušný d.s. definován na otevřené nadmnožině $\{0\} \times \Omega$.

Definice. Řekneme, že (φ, U) a (ψ, V) jsou *ekvivalentní d.s.*, jestliže existuje $\alpha > 0$ a homeomorfismus $h : U \to V$ takový, že $h(\varphi(t, x)) = \psi(\alpha t, h(x))$ v příslušném definičním oboru. Je-li h dokonce C^k-difeomorfismus (resp. izomorfismus vektorových lineárních prostorů), hovoříme o C^k (resp. lineární) ekvivalenci d.s. Je-li $\alpha = 1$, jde o *izochronní* ekvivalenci d.s.

Věta 1.1. D.s. generované rovnicemi $x' = Ax$ a $y' = By$ jsou lineárně ekvivalentní, právě když existuje $\alpha > 0$ tak, že zobrazení A a αB jsou podobná.

Věta 1.2. D.s. generované rovnicemi $x' = Ax$ a $y' = By$ jsou C^1 ekvivalentní, právě když jsou lineárně ekvivalentní.

Lemma 1.1. Nechť φ je d.s. generovaný $x' = Ax$, kde $\operatorname{Re} \sigma(A) < 0$. Pak existuje norma $|\cdot|_*$ na E taková, že $\varphi : \mathbb{R} \times S \to E \setminus \{0\}$ je homeomorfismus, kde $S = \{|x|_* = 1\}$ je příslušná jednotková sféra.

Věta 1.3. Nechť $\operatorname{Re} \sigma(A) < 0$. Potom d.s. generované rovnicemi $x' = Ax$ a $y' = -y$ jsou ekvivalentní.

Poznámka. Z vět 1.1 a 1.2 plyne, že tato ekvivalence obecně není lepší než jen spojitá.

Značení. Pro $A \in \mathcal{L}(E)$ značme $m_+(A)$ resp. $m_-(A)$ resp. $m_0(A)$ počet (včetně násobnosti) vlastních čísel, která splňují $\operatorname{Re} > 0$ resp. $\operatorname{Re} < 0$ resp. $\operatorname{Re} = 0$. Zjevně $m_+(A) + m_-(A) + m_0(A) = n$.

Definice. Zobrazení $T \in \mathcal{GL}(E)$ se nazve hyperbolické, jestliže $|\lambda| \neq 1$ pro každé $\lambda \in \sigma(T)$. Je dán přirozený rozklad $T = T_0 \oplus T_\infty$ na podprostorech příslušných k vlastním číslům $|\lambda| < 1$ resp. $|\lambda| > 1$.
Stacionární bod x_0 rovnice $x' = f(x)$ se nazve hyperbolický, jestliže $\exp(tA)$ je hyperbolické pro každé $t \neq 0$; ekvivalentně $m_0(A) = 0$, kde $A = \nabla f(x_0)$.

Věta 1.4. Nechť A, $B \in \mathcal{GL}(E)$. Potom d.s. generované rovnicemi $x' = Ax$ a $y' = By$ jsou ekvivalentní, právě když $m_-(A) = m_-(B)$.

Poznámky. Pro T hyperbolické budeme BÚNO (tj. až na změnu normy) předpokládat, že $\|T_0\| \leq \alpha$, $\|(T_\infty)^{-1}\| \leq \alpha$ pro jisté $\alpha \in (0, 1)$.

Značení. Prostor spojitých omezených funkcí $E \to E$ značíme $BC(E)$, lipschitzovskou konstantu značíme Lip.

Lemma 1.2. Nechť T je regulární hyperbolické zobrazení. Nechť $g \in BC(E)$ a $\operatorname{Lip} g$ je dost malá. Potom T a $T + g$ jsou topologicky konjugované.

Podrobněji: jestliže

$$\lambda := \operatorname{Lip} g < \frac{1}{2} \min\{1-\alpha, \|T^{-1}\|^{-1}\}, \tag{1}$$

pak existuje právě jeden homeomorfismus $H = I + u$, kde $u \in BC(E)$ t.ž. $(T+g) \circ H = H \circ T$.

Věta 1.5. [Hartman - Grobmanova věta.] Nechť f je C^1 na okolí hyperbolického stacionárního bodu x_0. Potom d.s. generovaný rovnicí $x' = f(x)$ je na jistém okolí x_0 izochronně ekvivalentní d.s., generovanému rovnicí $y' = Ay$ na okolí $y_0 = 0$, kde $A = \nabla f(x_0)$.

Poznámka. Uvidíme v příští kapitole, že tato ekvivalence obecně není C^1. V případě nehyperbolických stacionárních bodů podobná věta neplatí – linearizovaná rovnice může mít dokonce jiný typ stability než původní systém.

2. Normální formy a bifurkace.

Výchozí úvaha. Mějme systém $x' = f(x)$ v okolí stacionárního bodu $x = 0$. Označme $L = \nabla f(0)$. Taylorova aproximace dá

$$x' = Lx + \mathcal{O}(|x|^2)$$

Lineární záměna proměnných $x = Cy$ vede na

$$y' = C^{-1}LCy + \mathcal{O}(|y|^2)$$

Pozorujeme :

- vhodnou volbou C lze odstranit téměř vše, ne však úplně vše v lineární části (Jordanův tvar)
- členy řádu ≥ 2 přejdou na členy řádu ≥ 2
- v aplikacích není zdaleka nutné počítat celou matici C; stačí znát vhodné invarianty L (kupř. znaménka vlastních čísel)

Teorie *normálních forem* provádí analogické úvahy (a má podobný typ výsledků) pro případ *nelineární* záměny proměnných. Podrobněji řečeno, substitucí $x = y + P(y)$, kde $P(y)$ jsou členy řádu k, se snažíme odstranit či vhodně „učesat“ členy řádu k, pro obecné $k \geq 2$.
Zároveň tato teorie vyřeší otázku, zda a za jakých podmínek je ekvivalence v Hartman-Grobmanově větě lepší než jen spojitá.

Definice. $H_k(E) = \big\{\boldsymbol{f} : E \to E : \; f_j \text{ je homogenní polynom stupně } k\big\}$. Speciálně $H_1(E) = L(E)$. Prostor $H_k(E)$ je generován bází $\{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} e^{(j)}\}$ kde $e^{(j)}$ jsou bázové vektory E a $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $\boldsymbol{x} \in E$ a $\boldsymbol{\alpha}$ jsou multiindexy stupně k.
V případě $n = 2$ je $H_2(E)$ generován bází (píšeme $\boldsymbol{x} = (x, y)$)

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \right\} \tag{2}$$

Pro lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definujeme zobrazení $\operatorname{ad} L$ předpisem

$$P(y) \mapsto LP(y) - \nabla P(y)Ly$$

Zjevně $\operatorname{ad} L$ je lineární zobrazení $H_k(E) \to H_k(E)$.

Věta 2.1. Systém

$$x' = Lx + f^{(2)}(x) + \cdots + f^{(k)}(x) + \mathcal{O}(|x|^{k+1}) \tag{3}$$

kde $f^{(j)} \in H_j(E)$, přechází substitucí $x = y + P(y)$, kde $P \in H_k$, na

$$y' = Ly + f^{(2)}(y) + \cdots + \operatorname{ad} LP(y) + f^{(k)}(y) + \mathcal{O}(|y|^{k+1})$$

Poznámky. Protože $\nabla P(0) = 0$, je $y \mapsto y + P(y)$ difeomorfismus (dokonce C^∞) na vhodném okolí 0. Členy řádu menšího než k se nemění; členy řádu k možno modifikovat operátorem $\operatorname{ad} L$, který je určen lineární částí L. Členy řádu většího než k přecházejí na členy řádu většího než k.

Důsledek. Nechť $\operatorname{ad} L : H_k(E) \to H_k(E)$ je prosté pro všechna $k = 2, \ldots, m$. Potom systém $x' = Lx + \ldots$ je na okolí počátku C^∞-ekvivalentní systému $y' = Ly + \mathcal{O}(|y|^{m+1})$.

Lemma 2.1. Nechť L je diagonální, tj. $L = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Potom $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} e^{(s)}$ jsou vlastní funkce $\operatorname{ad} L$ s příslušnými vlastními čísly $\lambda_s - (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda})$.

Definice. Nechť $L = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Rovnost $\lambda_s = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda})$ nazýváme rezonancí řádu $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Člen $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} e^{(s)}$ nazýváme rezonantní monom.

Věta 2.2. [Poincaré, Siegel, Sternberg] Nechť L nemá rezonance řádu $k \geq 2$. Potom systém $x' = Lx + \ldots$ je na okolí počátku C^∞-ekvivalentní linearizovanému systému $y' = Ly$. Obecněji, systém $x' = Lx + f(x)$ je C^∞-ekvivalentní systému $y' = Ly + g(y)$, kde $g(y)$ obsahuje pouze rezonantní monomy.

Příklady. ① $L = \lambda I$, kde $\lambda \neq 0$ nemá žádné rezonance řádu $k \geq 2$, tedy $x' = \lambda x + \ldots$ je vždy C^∞-ekvivalentní $x' = \lambda x$.
② $L = \operatorname{diag}(2, 1)$ má rezonanci řádu 2, příslušný monom je $(y^2, 0)$. Tedy systém $x' = 2x + y^2$, $y' = y$ není C^1-ekvivalentní příslušné linearizaci $x' = 2x$, $y' = y$.
③ $L = \operatorname{diag}(-1, 1)$ má rezonanci řádu 3.
④ $L = \operatorname{diag}(a + \sqrt{b}, a - \sqrt{b})$, kde $\sqrt{b}$ je iracionální, nemá žádné rezonance.

Výpočet 2.1. Nechť

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

– nehyperbolická lineární část, související s Hopfovou bifurkací. Potom

$$\operatorname{ad} L \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Obecněji, matice $\operatorname{ad} L$ vůči bázi $\mathcal{B}_2$ je

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice je regulární, tj. členy řádu $k = 2$ lze vždy odstranit.

Uvažujme nyní $k=3$. Vzhledem k bázi

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y^3 \end{pmatrix} \right\}$$

má $\operatorname{ad} L$ matici

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice je singulární. (Sloupce 1, 2, 3, 4, 5 a 8 jsou nezávislé, sloupce 6 a 7 lze jimi vyjádřit.) Lze psát

$$H_3 = \operatorname{ad} L(H_3) \oplus V$$

kde V je algebraický doplněk – má dimenzi 2, leč není určen jednoznačně. Volme V bází (v souřadnicích $\mathcal{B}_3$)

$$v_1 = (1,0,1,0,0,1,0,1)^t,\ v_2 = (0,-1,0,-1,1,0,1,0)^t$$

tj. členy řádu 3 lze odstranit až na nějakou lineární kombinaci $av_1 + bv_2$ – to odpovídá členům

$$\begin{gathered} \dots + (ax - by)(x^2+y^2) + \dots \\ \dots + (bx + ay)(x^2+y^2) + \dots \end{gathered}$$

což je zjevně příhodné pro přechod do polárních souřadnic.

V případě $k=4$ (obecněji pro každé k sudé) je matice $\operatorname{ad} L$ regulární, tj. členy sudého řádu lze vždy odstranit. V případě lichého k lze odstranit vše vždy až na dvoudimenzionální podprostor příslušného H_k.
Speciálně pro $k=5$ má $\operatorname{ad} L$ vzhledem k bázi

$$\mathcal{B}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x^5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^4y \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ xy^4 \end{pmatrix} 0, \begin{pmatrix} 0 \\ y^5 \end{pmatrix} \right\}$$

tvar

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

opakující se struktura je zřejmá a podobně jako v případě $k = 3$ se ukáže, že členy řádu 5 lze odstranit až na

$$\begin{aligned} \dots &+ (ax - by)(x^2 + y^2)^2 + \dots \\ \dots &+ (bx + ay)(x^2 + y^2)^2 + \dots \end{aligned}$$

Výpočet 2.2. Uvažujme systém s lineární částí

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

– tj. hyperbolický (sedlový) bod.
Případ $k = 2$: matice $\operatorname{ad} L$ vůči bázi $\mathcal{B}_2$ je

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– členy druhého řádu lze odstranit.
Případ $k = 3$: matice $\operatorname{ad} L$ vůči bázi $\mathcal{B}_3$ je

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Nulovost druhého a sedmého sloupce značí, že

$$\begin{aligned} \dots &+ ax^2y + \dots \\ \dots &+ bxy^2 + \dots \end{aligned} \tag{5}$$

jsou rezonantní monomy, které nelze odstranit, dokonce ani modifikovat žádnou substitucí typu $I + P$, kde $P \in H_3$. Tedy žádný systém s lineární částí (4) a obsahující členy (5) nemůže být C^1-ekvivalentní své linearizaci.

Věta 2.2. [Normální tvar Hopfovy bifurkace.] Soustavu

$$\begin{aligned} x' &= -\omega_0 y + f(x, y) \\ y' &= \omega_0 x + g(x, y) \end{aligned}$$

lze substitucí tvaru $I + P(X)$, kde $P(X) \in H_2 \oplus H_3$ převést na tvar

$$\begin{aligned} x' &= -\omega_0 y + (ax - by)(x^2 + y^2) + \dots \\ y' &= \omega_0 x + (bx + ay)(x^2 + y^2) + \dots \end{aligned}$$

kde

$$16a = f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy} + \frac{1}{\omega_0}\Big[f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}\Big]$$

kde $f_{xx}, f_{xyy}, \dots$, značí vždy příslušnou parciální derivaci, vypočtenou v bodě $(0,0)$. Obecněji, má-li lineární část tvar

$$\begin{pmatrix} d\mu & -(\omega_0 + c\mu) \\ \omega_0 + c\mu & d\mu \end{pmatrix}$$

lze systém převést na tvar – v polárních souřadnicích –

$$\begin{aligned} r' &= r(d\mu + ar^2) + \dots \\ \theta' &= \omega_0 + c\mu + br^2 + \dots \end{aligned}$$

Odsud lze pomocí VoIF a lemmatu o vydělení dedukovat existenci hladké křivky parametrů $\mu = \hat{\mu}(r_0)$, pro než existují netriviální periodická řešení, procházející bodem $(x, y) = (r_0, 0)$. Dále je $\hat{\mu}'(0) = 0$, $\hat{\mu}''(0) = -2a/d$ a tato periodická řešení jsou (orbitálně) stabilní, právě když $a < 0$. To je ve shodě s heuristikou, plynoucí ze „schematizované" rovnice

$$r' = r(d\mu + ar^2)$$

3. Nehladká dynamika a diferenciální inkluze.

Klasická teorie: rovnice $x' = f(t, x)$ za předpokladu $f(\cdot, \cdot)$ spojité či hladké.
Méně regularity vůči času: lokální integrovatelnost (Carathéodoryho teorie), míry, derivace BV funkcí (fundamentální řešení, distribuce). Ještě méně regularity: bílý šum (stochastické dif. rovnice).
Nás budou zajímat: úlohu s nespojitostí vůči x, vedoucí na pravou stranu ve tvaru multifunkce, s přirozenou formulací úlohy jako diferenciální inkluze.

Příklady. ① Coulombovo (suché) tření: třecí síla nezávisí na rychlosti; je-li síla menší než kritická mez, pohyb nenastává. Newtonovy pohybové zákony pak dávají

$$mx'' + F = h(t) \tag{6}$$

kde $m > 0$ je hmotnost, $h(t)$ je vnější (daná) síla, F je třecí síla a x resp. x' je poloha resp. rychlost, přičemž platí $F = F_c$ pro $x' > 0$, $F = -F_c$ pro $x' < 0$ a $F \in [-F_c, F_c]$ pokud $x' = 0$.
② Gauseho model dravec-kořist se skrýší:

$$x' = rx - y\varphi(x) \tag{7}$$
$$y' = \big(e\varphi(x) - h\big)y \tag{8}$$

kde funkce $\varphi(x)$ vyjadřující míru požírání kořisti je

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x < x_s \\ \frac{mx}{a+x} & x > x_s \end{cases} \tag{9}$$

Smyslu modelu je následující: pokud $x < x_s$, kde x_s je „kapacita skrýše", nedochází vůbec k odlovu kořisti. Naopak $x > x_s$ je kořist nucena opustit skrýš a nastává odlov jako u Holling-Tannerova modelu.

③ Problém úlohy s regulací

$$x' = f(t, x, u)$$

kde $u = u(t)$ je měřitelná funkce s hodnotami v U lze ekvivalentně formulovat jako

$$x' \in F(t, x)$$
$$\text{kde } F(t, x) = \{f(t, x, u);\ u \in U\}$$

Definice. Řešením Gauseho modelu (7–9) rozumíme trojici $x = x(t)$, $y = y(t)$ a $\varphi = \varphi(t)$, splňující

- $x(t)$, $y(t)$ jsou absolutně spojité, $\varphi(t)$ je měřitelná
- pro s.v. t platí

$$\begin{aligned} x' &= rx - y\varphi \\ y' &= \big(e\varphi - h\big)y \\ (x, \varphi) &\in \mathcal{G} \end{aligned}$$

  kde $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ je definováno jako

$$\mathcal{G} = \{(x, 0),\ x \in [0, x_s]\} \cup \{(x_s, y),\ y \in [0, \tfrac{mx_s}{a+x_s}]\} \cup \{(x, \tfrac{mx}{a+x}),\ x \geq x_s\}$$

Poznámka. Filippovův přístup: nechť pravá strana F rovnice $X' = F(X)$ má nespojitost na nadploše Γ, s jednostrannými limitami F_+ a F_-.
Zřejmě potíže s pokračováním řešení nastávají pouze tehdy, když F_+ i F_- míří do Γ. (Situace, že by obě mířily ven, v ,,rozumných" modelech nenastává).
V takovém případě se na Γ řídím rovnicí $X' = \tilde{F}(X)$, kde $\tilde{F} = \alpha F_- + (1 - \alpha)F_+$, přičemž $\alpha \in [0, 1]$ je voleno tak, že $\tilde{F}$ má směr tečný ke Γ.

Věta 3.1. Nechť $x_0 \geq 0$, $y_0 \geq 0$ a $T > 0$ je dáno. Pak existuje právě jedno řešení Gauseho modelu, definované na $[0, T]$, s počátečními podmínkami $x(0) = x_0$ a $y(0) = y_0$.

Nyní se budeme zabývat problémem Coulombova tření; úlohu ještě nepatrně zobecníme na

$$mx'' + F - \gamma(x') + \sigma(x) = h(t) \tag{10}$$

kde $\gamma(\cdot)$ je relaxační funkce, $\sigma(\cdot)$ elastická síla (např. pružiny). Budeme předpokládat, že pravá strana $h(t) \in L^2(0, T)$ a funkce σ, γ jsou lipschitzovské.

Definice. Řešením Coulombova problému (10) rozumíme dvojici $x = x(t)$ a $F = F(t)$, splňující

- $x(t)$ a $y(t) = x'(t)$ jsou absolutně spojité, $F(t)$ měřitelná
- pro s.v. t je splněna rovnice (10) a dále vztah

$$(x', F) \in \mathcal{C} \tag{11}$$

  kde $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ je definováno jako

$$\mathcal{C} = \{(x, -F_c),\ x \leq 0\} \cup \{(0, y),\ y \in [-F_c, F_c]\} \cup \{(x, F_c),\ x \geq 0\} \tag{12}$$

Věta 3.2. Pro každé x_0, y_0 existuje právě jedno řešení Coulombova problému, splňující $x(0) = x_0$ a $y(0) = y_0$.

Poznámka. V uvedených větách jde pouze o *dopřednou* existenci a jednoznačnost; pro $t < 0$ jedno ani druhé obecně zaručeno není.

Poznámka. Multifunkce $F : X \to 2^Y$ jednoznačně odpovídá svému grafu

$$\mathcal{G} = \{(x, y) \in X \times Y;\ y \in F(x)\}$$

proto v následujícím tyto pojmy používáme v podstatě jako synonyma.

Definice. Graf $\mathcal{G}$ nazveme *monotónní*, jestliže pro všechny dvojice (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \mathcal{G}$ platí $(y_1 - y_2)(x_1 - x_2)$.
Nazveme ho *maximálně monotónní*, jestliže je monotónní, a neexistuje striktní rozšíření, které je opět monotónní.

Poznámky. Pojem maximální monotonie má mnoho pěkných vlastností, např.

- lze obecně uplatnit i pro multifunkce na Hilbertových prostorech či z X do X^*, obecně kdykoliv má smysl součin $\langle x, y\rangle$ pro $y \in F(x)$
- geometrická charakterizace: $\mathcal{G}$ je maximálně monotónní $\iff$ otočením o 45^o vznikne graf 1-lipschitzovské (jednohodnotové) funkce
- má-li multifunkce $x \to F(x)$ maximálně monotónní graf, pak úloha

$$\begin{aligned} x' &\in F(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

  má pro každé x_0 právě jedno tzv. *pomalé řešení*, tj. $x'(t)$ je (skoro vždy) bodem minima množiny $\{|y|;\ y \in F(x(t))\}$.

My využijeme jednu klíčovou vlastnost monotónních zobrazení, totiž uzavřenost grafu vzhledem k silné krát slabé topologii:

Lemma 3.1. Nechť X je Hilbertovův prostor, nechť multifunkce $F : X \to 2^X$ je maximálně monotónní. Nechť

- $x_n(t) \to x(t)$ silně v X
- $y_n(t) \to y(t)$ slabě v X
- $y_n \in F(x_n)$ pro $\forall n$

Potom též $y \in F(x)$.

Poznámka. Ekvivalentně řečeno jde o uzavřenost grafu F vzhledem k silné krát slabé topologii. ∎

Poznámky. Nechť $F : B \to B$ je spojitá (jednohodnotová) funkce, B neprázdná podmnožina prostoru X. Existence pevného bodu je zaručena, je-li dále

- $X = \mathbb{R}^n$, B konvexní, omezená, uzavřená (Brouwer)
- X obecně Banachův, $B \subset X$ konvexní, omezená, uzavřená a navíc buď F nebo $F(B)$ prekompaktní (Schauder)

- X úplný metrický prostor, F kontrakce (Banach)

Aplikace na existenční věty v teorii DR: Schauder $\Longrightarrow$ Peano, Banach $\Longrightarrow$ Picard, vždy jde o pevný bod funkcionálu

$$x(t) \mapsto x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds$$

Pro diferenciální inkluze potřebujeme analogicky pevný bod pro multifunkce Pro multifunkce je to podobné, potřebujeme správný pojem spojitosti. V následujícím X je lokálně konvexní prostor (typicky Banachův prostor se silnou nebo slabou topologií).

Definice. Pevným bodem multifunkce F rozumíme x takové, že $x \in F(x)$.
Multifunkce F se nazve shora polospojitá, jestliže pro každé x_0 a otevřenou $G \supset F(x_0)$ existuje okolí $U(x_0)$ takové, že $F(x) \subset G$ pro každé $x \in U(x_0)$.

Lemma 3.2. Nechť $K \subset X$ je kompaktní, nechť multifunkce $F : K \to 2^K$ má uzavřené hodnoty. Potom F je shora polospojitá, právě když její graf je uzavřený v $K \times K$.

Věta 3.3. [Kakutani - KyFan.] Nechť $K \subset X$ je neprázdná, kompaktní, konvexní. Nechť $F : K \to 2^K$ je shora polospojitá, s konvexními, uzavřenými, neprázdnými hodnotami. Potom F má v K pevný bod.

Důsledek. Důkaz Věty 3.2 (existenční část). Osnova důkazu je následující:
1) $X = L^2(0,T)$ se slabou topologií, $K = \{F \in X;\ |F(t)| \leq F_c \text{ s.v.}\}$, $Y = AC([0,T])$. Dále definujeme $\eta : K \to Y$ řešicí funkci(onál) $F(\cdot) \mapsto y(\cdot)$ rovnice (10). Konečně $\varphi : L^2(0,T) \to K$ je multifunkcionál „přípustných sil", tj.

$$\varphi(y) = \{F \in K;\ (y(t), F(t)) \in \mathcal{C} \text{ s.v.}\}$$

Zřejmě (klíčové pozorování) existence řešení $\Longleftrightarrow$ pevný bod multifunkcionálu $\mathcal{F} = \varphi \circ \eta$ na množině K. Ověření předpokladů Věty 3.3:
2) $K \subset X$ je kompaktní (neboť je omezená, uzavřená a konvexní, tedy slabě uzavřená). Podobně $\mathcal{F}(F)$ je neprázdná, konvexní, uzavřená (a tedy kompaktní).
3) Operátor η je spojitý (zobecněný Picard) a navíc omezený do $W^{1,2}$ (apriorní odhady), tedy kompaktní do L^2 díky vlastnostem Sobolevových prostorů
4) Multifunkcionál φ má maximálně monotónní graf. Díky Lemmatu 3.1 a kompaktnosti η odsud lehce dostanu uzavřenost grafu a tedy shora polospojitost $\mathcal{F} = \varphi \circ \eta$ (vše vůči X, tj. slabé L^2 topologii).

4. Optimální regulace

Budeme se zabývat úlohou

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathcal{U}} P(u(\cdot)) &= \int_0^{t^*} r(x(t), u(t))\, dt \\ \mathcal{U} &= \{u : [0,T] \to U,\ \text{měřitelné}\ \} \\ x' &= f(t, x, u), \quad x(0) = x_0,\ x(t^*) = x_1 \end{aligned} \tag{M}$$

Trvalé předpoklady: f, r hladké a omezeného růstu tak, aby úloha měla smysl (existence, jednoznačnost x, navíc spojitá závislost na u vůči řekněme L^1 topologii, zdola omezenost funkcionálu P).

Množina $U \subset \mathbb{R}^m$ hodnot přípustných regulací je kompaktní, konvexní, neprázdná.

Poznámky. Jedná se o tzv. Mayerův problém (s předepsanou koncovou podmínkou x_1 a volným časem t^*), speciálním případem je problém časově optimální regulace ($r \equiv 1$).
Budeme studovat nutné i postačující podmínky nabývání minima.

Značení a terminologie. Pro danou regulaci $u(t)$ a počáteční podmínku x_0 existuje jediné řešení $x(t)$, tzv. ,,odezva", též ,,trajektorie". (Anglicky: response, trajectory).
Splňuje-li trajektorie/odezva, příslušná k danému $u(t)$ navíc počáteční a koncovou podmínku, píšeme krátce $x_0 \xrightarrow[u(\cdot)]{t^*} x_1$.

Lze studovat speciální třídy regulací s vyšší regularitou, např. $\mathcal{U}_\lambda^{\mathrm{Lip}}$ značí λ-lipschitzovské, $\mathcal{U}_\nu^{\mathrm{PK}}$ jsou po částech konstatní s nejvýše ν body nespojitosti. (Existence minima v těchto třídách je snadná díky jejich kompaktnosti v L^1 normě).
Při studiu úlohy (M) je přirozené zabývat se multifunkcí $F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$, definovanou jako

$$F(t,x) = \big\{ f(t,x,u);\ u \in U \big\} \tag{13}$$

Ze spojitosti f a kompaktnosti U lehce plyne, že F má kompaktní hodnoty a také uzavřený graf. Dle Lemmatu 3.2 je tedy shora polospojitá.

Věta 4.1. Funkce $x(t) \in AC([0,T])$ je trajektorií, právě když $x'(t) \in F(t, x(t))$ pro s.v. t.

Lemma 4.1. [Filippov.] Nechť U je kompaktní, $g(t,u) : [0,T] \times U \to \mathbb{R}^n$ spojitá, $\psi(t) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ měřitelná funkce taková, že $\psi(t) \in g(t,U)$ pro s.v. t.
Potom existuje měřitelná funkce $\eta(t) : [0,T] \to U$ taková, že $\psi(t) = g(t, \eta(t))$ pro s.v. t.

Lemma 4.2. Nechť multifunkce (13) má navíc konvexní hodnoty. Potom množina trajektorií je uzavřená v $C([0,T])$.

Definice. Reformulace úlohy (M): rozšířená úloha ($\hat{M}$), přidání falešné rovnice $x'_{n+1} = r(t,x,u)$, $x_{n+1}(0) = 0$. Pak jde o minimizaci $x_{n+1}(t^*)$.

Věta 4.2. Nechť existuje $u(t) \in \mathcal{U}$ takové, že $x_0 \xrightarrow[u(\cdot)]{t^*} x_1$. Nechť multifunkce, příslušná k rozšířené úloze, tj.

$$\hat{F}(t,x) = \big\{ (f(t,x,u), r(t,x,u)),\ u \in U \big\}$$

má konvexní hodnoty. Potom úloha (M) má řešení.

Věta 4.3. [Pontrjaginův princip maxima pro úlohu (M).] Nechť $u^*(t) \in \mathcal{U}$ je lokální minimum úlohy (M), nechť $x^*(t)$ je příslušná odezva. Pak existuje $q \le 0$ takové, že pro Hamiltonián $H(p,x,u) = p \cdot f(x,u) + qr(x,u)$ platí:

1. $H(p^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \max_{v \in U} H(p^*(t), x^*(t), v)$
2. $\max_{v \in U} H(p^*(t), x^*(t), v) = 0$

pro skoro všechna $t \in (0, t^*)$, kde $p^*(t)$ je jisté netriviální řešení adjungované úlohy

$$(p^T)' = -\big(\nabla_x H\big)(p, x^*(t), u^*(t))$$

Opakování. Princip ,,bang-bang" – Věta 18.9. z ODR2. Pro lineární autonomní úlohu

$$x' = Ax + Bu \tag{14}$$

s přípustnými regulacemi $u(t) \in [-1,1]^m$ se lze vždy omezit na regulace typu ,,bang-bang", tj. splňující $u_i(t) = \pm 1$ pro s.v. t a všechna i.

Definice. Bod $x \in K$ nazveme *extremálním* bodem množiny K, pokud x *nelze* napsat jako netriviální konvexní kombinaci bodů z K. Značíme $x \in \operatorname{ext} K$.
Krejn-Milmanova věta: nechť X je LKP, nechť $K \subset X$ je neprázdná, konvexní, kompaktní množina. Pak $\operatorname{ext} K \neq \emptyset$; obecněji $K = \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{ext} K)$.

Věta 4.4. [Princip ,,bang-bang".] Je dána úloha (14). Nechť $S \subset \mathbb{R}^m$ je libovolná omezená množina. Potom $x_0 \xrightarrow[u(\cdot)]{t^*} x_1$ pro nějaké $u(\cdot)$ s hodnotami v S, právě když $x_0 \xrightarrow[\tilde{u}(\cdot)]{t^*} x_1$ pro nějaké $\tilde{u}$ s hodnotami v $\operatorname{co} S$.
Obecněji: pro úlohu (14) se lze omezit na regulace typu ,,bang-bang", tj. splňující $u(t) \in \operatorname{ext} U$ pro s.v. t.

Důsledek. Existence minima pro úlohu, která je lineární, autonomní vzhledem k x, tj. $f = f(x,u) = Ax + b(u)$, $r = r(x,u) = a \cdot x + e(u)$.