cíl: analýza replikátorové rce:

$\pi_i(x) = e^{(i)} \cdot Ax$ výplatní matice

$\pi(x) = x \cdot Ax$

$$(RD) \quad x_i' = x_i \left(\pi_i(x) - \pi(x) \right)$$

zisk i-té čisté strategie

zisk celé populace

$$\Delta = \left\{ x \in \mathbb{R}^n ;\ x_i \in [0,1] ,\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$$

Věta 7. Pro každou počáteční podmínku z Δ existuje právě jedno řešení $x(t)$ replikátorové rovnice, definované a splňující $x(t) \in \Delta$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$.
Dále: nosič populace $C(x(t))$ a tedy speciálně hranice, hrany, vrcholy a vnitřek Δ jsou invariantní vůči replikátorové dynamice.

Dk: lok. $\exists$ & (glob.) jedn. $\Leftarrow$ standardní teorie ODR

$t \in I \ni 0$

(P.S. $\in C^1$, dokonce polynom)

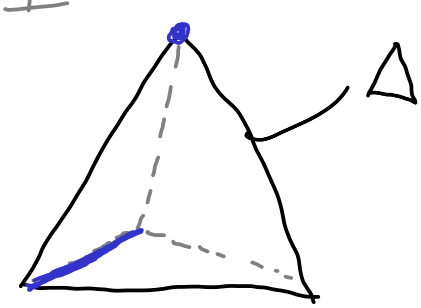
pišme: $x_i'(t) = r_i(t) \cdot x_i(t)$, kde $r_i(t) = \pi_i(x(t)) - \pi(x(t))$

$$\Rightarrow x_i(t) = x_i(0) \cdot \underbrace{\exp\left(\int_0^t r_i(s)\, ds \right)}_{>0}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn} x_i(t) = \operatorname{sgn} x_i(0), \quad \forall t \in I$$

$\Rightarrow$ invariance nosiče, $C(x) = \{ i ,\ x_i > 0 \}$

obecněji: komponent Δ (vrcholy, hrany)



invariance Δ : $x_i(t) \geq 0$ .. již víme, zbývá $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i(t) = 1}_{y(t)}$

$$y' = \sum_{i=1}^{n} x_i' = \sum_{i=1}^{n} x_i(\pi_i(x) - \pi(x))$$

$$= \pi(x) - \left(\sum x_i\right)\pi(x)$$

$$\Rightarrow \underline{y'} = \pi(x) \cdot (1 - \underline{y})$$

jedn. řešení $\Rightarrow$ $y(t) \equiv 1$

zbývá: globální $\exists$ $\Leftarrow$ věta o opuštění kompaktu

---

Věta 8. Pro replikátorovou dynamiku platí:

(RD) $x_i' = x_i(\pi_i(x) - \pi(x))$

1. $\tilde{x}$ je NE $\implies$ $\tilde{x}$ je stacionární bod
2. $\tilde{x}$ je stabilní stacionární bod $\implies$ $\tilde{x}$ je NE
3. $\tilde{x} \in \operatorname{int} \Delta$ je stac. bod $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ je N.e.

Dk. Lemma 3 : $p \in \beta(q) \iff e^{(i)} \in \beta(q)$ pro $\forall i \in C(p)$

ad 1) $\tilde{x}$ N.e. $\Rightarrow$ buď $x_i = 0$ $\Rightarrow x_i' = 0$

(i lib.)

$\tilde{x} \in \beta(\tilde{x})$

nebo $x_i \neq 0$ ... L.3 $\Rightarrow$ $e^{(i)} \in \beta(\tilde{x})$

tj. $\pi_i(\tilde{x}) = \pi(\tilde{x})$

ad2) $\tilde{x}$ není N.e. $\Longrightarrow$ $\tilde{x} \notin \beta(\tilde{x})$, tj $\exists y$ „lepší odpověď"

L.3 $\Rightarrow \exists j$ t.ž. $\pi_j(\tilde{x}) > \pi(\tilde{x})$

spec. $\pi_j(x) - \pi(x) > 0$

na jistém $\mathcal{U}(\tilde{x})$

vol: $x(0) \in \mathcal{U}(\tilde{x})$, $x_j(0) \neq \cancel{\tilde{x}}$ 0

$\Rightarrow$ $x_j' = x_j \underbrace{(\pi_j(x) - \pi(x))}_{\geq \alpha > 0}$ na $\mathcal{U}(\tilde{x})$

$\Rightarrow$ $x_j(t) \geq \underbrace{x_j(0)}_{\neq 0} \cdot e^{\alpha t}$, $t \geq 0$

$\Rightarrow$ nestabilita $\tilde{x}$

ad3) $\tilde{x} \in \operatorname{int} \Delta$, stac. bod $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ je N.e.

(tj. $\tilde{x}_i > 0 \ \forall i$)

$\Rightarrow$ $\pi_i(\tilde{x}) = \pi(\tilde{x}) \ \forall i$

$$\pi(y, \tilde{x}) = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} y_i \pi_i(\tilde{x}) = \pi(\tilde{x})$$

$\forall y \in \Delta$

$\Rightarrow$ $y \in \beta(\tilde{x}) \ \forall y \in \Delta$ spec $\tilde{x} \in \beta(\tilde{x})$.

$\square$

Věta 9. $\tilde{x}$ je ESS $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ je asymptoticky stab. stac. bod (RD).

Dk.: $$H(y) := \sum_{i\in C(\tilde{x})} \tilde{x}_i \ln\left(\frac{\tilde{x}_i}{y_i}\right), \quad y \in Q_{\tilde{x}}$$

Kullback-Leibler

$\square$

Otázka: RD $\overset{?}{\Longrightarrow}$ nárůst $\pi(x)$

$$x_i' = x_i(\pi_i(x) - \pi(x))$$

[Fisher]

> **Věta 10.** [Základní věta přírodního výběru.] Nechť matice A je symetrická. Potom pro (RD) platí $\frac{d}{dt}\pi(x(t)) \geq 0$, přičemž rovnost nastává právě ve stacionárních bodech.

Dk.: nechť $x(t)$ ... řeší (RD) $\qquad \pi(x) = x\cdot Ax$

$$\frac{d}{dt}\pi(x(t)) = (x\cdot Ax)' = x'\cdot Ax + \underbrace{x\cdot Ax'}_{= A^T x\cdot x' = Ax \cdot x'} = 2x'\cdot Ax$$

$$= \overbrace{\sum_i 2x_i'}^{0}\overbrace{(Ax)_i}^{\pi_i(x)} = \underbrace{\sum_i 2x_i(\pi_i(x)-\pi(x))}_{0}(\pi_i(x) - \pi(x))$$

(víme: $\sum x_i \equiv 1 \Rightarrow \sum x_i' = 0$)

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\pi(x) = 2\sum_i x_i\left(\pi_i(x) - \pi(x)\right)^2$$

≥ 0 navíc $= 0 \iff x$ stac. bod.

Pozn.: $A \rightsquigarrow A + \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ & \vdots & \\ & c & \end{pmatrix}$

nemění hodnotu $\pi(x-y, z)$ pro $\forall x, y, z \in \triangle$

$\pi(x,z) - \pi(y,z)$

$\Rightarrow$ nemění N.e.

ESS

(RD)

normalizace hry: vynuluji diagonálu

Příklad: jestřáb vs. hrdlička

(RD) $x' = 2x(1-x)(2-3x)$