Věty o linearizované (ne)stabilitě.

Nechť x_0 je stac. bod (1), nechť $f \in C^1(\mathcal{U}(x_0))$.
Označ. $A = \nabla f(x_0)$. Potom platí:

1. $\forall \lambda \in \sigma(A), \ \mathrm{Re}\,\lambda < 0 \Rightarrow x_0$ asympt. stab.
2. $\exists \lambda \in \sigma(A), \ \mathrm{Re}\,\lambda > 0 \Rightarrow x_0$ nestabilní

Problém: přibližné určení spektra matice

($\Leftrightarrow$ kořenů polynomu)

Věta [A. Hurwitz, 1894]

Nechť $p(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \dots + a_m$,

nechť $a_0 > 0, \ a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$.

Pak $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ pro $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ kořen $p(\lambda)$

$\Leftrightarrow$ matice

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots \end{pmatrix}$$

obecně $A_{ij} = a_{2j-i}$ $i,j = 1, \dots n$

kde $a_k = 0$ pro $k \notin \{0, 1, \dots n\}$

má všechny hlavní subdeterminanty kladné, tj.

$$D_1 = a_1 > 0$$

$$D_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

$$D_3 = \cdots > 0$$

$$\vdots$$

$$D_n = \det A > 0.$$

Speciálně: 1) $\varkappa(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$

má $\operatorname{Re}\lambda < 0$ pro $\forall$ kořen

$\iff$ $a_1 > 0, \; a_1 a_2 - a_3 > 0, \; a_3 > 0$

2) $\varkappa(\lambda) = \lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4$

má $\operatorname{Re}\lambda < 0$ pro $\forall$ kořen

$\iff$ $a_1 > 0, \; a_1 a_2 - a_3 > 0, \; a_4 > 0$

$a_1(a_2 a_3 - a_1 a_4) - a_3^2 > 0$

Věta [Geršgorin]

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pak $\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_i$,

kde $K_i = \{ z \in \mathbb{C},\ |z - a_{ii}| \le R_i \}$

$$R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

$$\begin{pmatrix} & & & \\ \text{———} & a_{ii} & \text{———} \\ & & & \end{pmatrix}$$

Dk.: buď $\lambda \in \sigma(A)$ libovolné

$\Rightarrow \quad \exists v \in \mathbb{C}^n,\ v \neq 0$ t. ž. $\boxed{Av = \lambda v}$

buď v_i největší (abs. hodn.) složka

BÚNO: $\underline{v_i = 1 \ge |v_j|}$, $\forall j$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = \lambda v_i$$

$$a_{ii} + \sum_{j\neq i} a_{ij} v_j = \lambda$$

$$|\lambda - a_{ii}| = \Big| \sum_{j\neq i} a_{ij} v_j \Big| \le \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \underbrace{|v_j|}_{\le 1}$$

$$\le R_i$$

$\Rightarrow \quad \lambda \in K_i$

Pozn. TRIK: reparametrizace času

$$\boxed{X' = F(X)}, \text{ pro } X = X(t)$$

položí: $X(t) = \tilde{X}(\underbrace{at}_{\tilde{t}})$ pro $a > 0$ pevné

$$\Rightarrow \boxed{a\tilde{X}' = F(\tilde{X})}$$

pro $\tilde{X} = \tilde{X}(\tilde{t})$

Příkl.

$$x' = (1-\theta)\frac{x}{4}(1-x-y)(5y-4x-4) + \theta\left(\frac{1}{3} - x\right)$$

$$y' = (1-\theta)\frac{y}{4}(1-x-y)(5y-4x-1) + \theta\left(\frac{1}{3} - y\right)$$

volme $a = \dfrac{1-\theta}{4}$

$$\Rightarrow \quad x' = x(1-x-y)(5y-4x-4) + \tilde{\theta}\left(\frac{1}{3} - x\right)$$

$$y' = y(1-x-y)(5y-4x-1) + \tilde{\theta}\left(\frac{1}{3} - y\right)$$

kde $\tilde{\theta} = \dfrac{4\theta}{1-\theta}$

Obecněji: $X' = F(X) \Rightarrow X' = \alpha(X) F(X)$

kde $\alpha(X) > 0$ je libovolná, hladká fce

polož: $\tilde{X}(t) = X(\underline{\varphi(t)})$

$$\tilde{X}'(t) = \underbrace{X'(\varphi(t))}_{= F(X(\varphi(t))) = F(\tilde{X}(t))} \underline{\underline{\varphi'(t)}} \overset{??}{=} \underline{\underline{\alpha(\tilde{X}(t))}} F(\tilde{X}(t))$$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi'(t) = \alpha(X(\varphi(t)))$$

Příkl.

$$x' = x\left(r\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{my}{A+x}\right)$$
$$y' = sy\left(1 - \frac{Py}{x}\right)$$

H.T. model

polož $\alpha = A + x > 0$ v 1. Q

$$\Rightarrow \quad x' = x\left(r\underline{(A+x)}\left(1 - \frac{x}{K}\right) - my\right)$$
$$y' = s\underline{(A+x)}\,y\left(1 - \frac{Py}{x}\right)$$