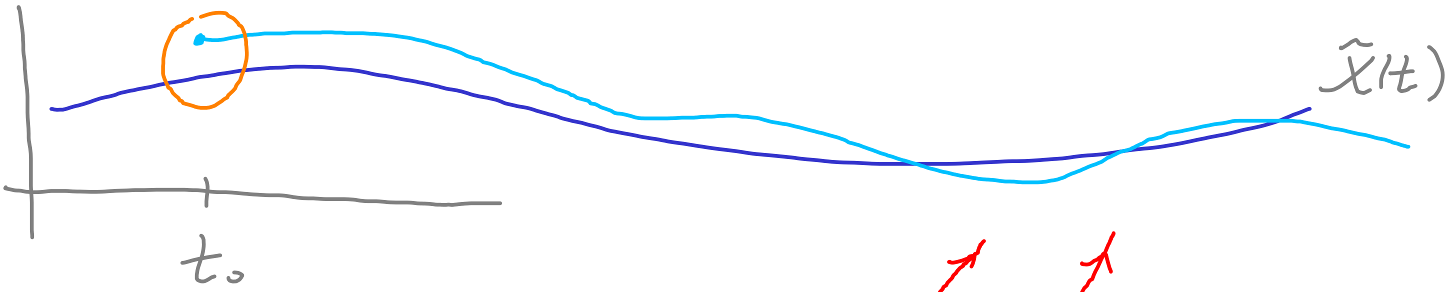
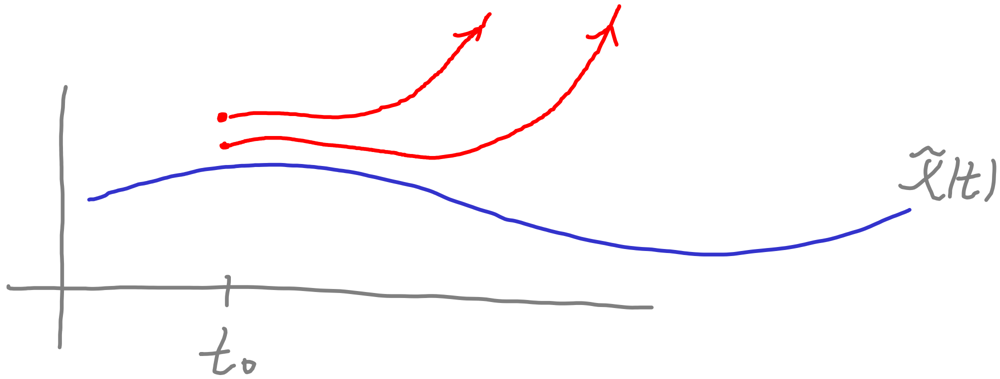
Stabilita řešení ODR





Situace: (1) $x' = f(x)$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená

řešení: $x = x(t) : I \to \mathbb{R}^n$, $I = (a,b) \subset \mathbb{R}^*$

BÚNO: každé řešení je tzv. maximální

Pozn.: maximální v bodě $t = b$

$\Leftrightarrow$ buď $t = +\infty$

nebo $|x(t)| \to +\infty$, $t \to b-$

nebo $x(t) \to \partial\Omega$, $t \to b-$

Definice
Nechť x_0 je stac. bod (1).
($\text{tj. } f(x_0)=0$)

Řekneme, že x_0 je:

(i) stabilní: $\forall \varepsilon>0\ \forall t_0\ \exists \delta>0$ t.ž. pro $\forall$ (max.) řešení $x(t)$ t.ž. $|x(t_0)-x_0|<\delta$ platí: $|x(t)-x_0|<\varepsilon$, pro $\forall t\geq t_0$

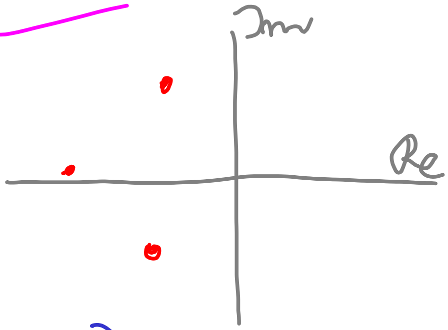
(ii) nestabilní: pokud není stabilní

(iii) asymptoticky stabilní: pokud je stabilní, navíc: $\forall t_0\ \exists \delta>0$ t.ž. pro řešení $x(t)$
$$|x(t_0)-x_0|<\delta \Rightarrow x(t)\to x_0,\ t\to+\infty$$

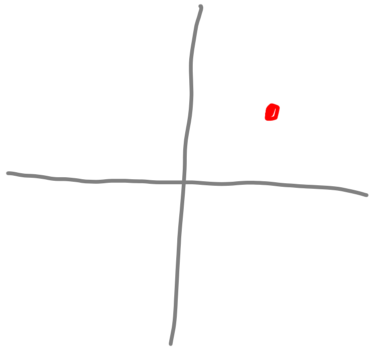
Věty o linearizované (ne)stabilitě.
Nechť x_0 je stac. bod (1), nechť $f\in C^1(\mathcal{U}(x_0))$.
Označ $A=\nabla f(x_0)$. Potom platí:

1. $\forall \lambda\in\sigma(A)$, $\operatorname{Re}\lambda<0 \Rightarrow x_0$ asympt. stab.
2. $\exists \lambda\in\sigma(A)$, $\operatorname{Re}\lambda>0 \Rightarrow x_0$ nestabilní

Pozn.

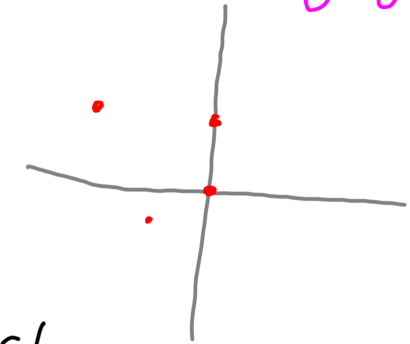


ad 1)



ad 2)

není pokryto



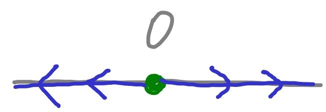
stabilita nelze rozhodnout jenom z vlastností $\underline{\underline{A}}$

Př.: $\boxed{x' = 0} \pm x^3$

lin. úloha: $A = 0 \in \mathbb{R}^{1\times 1}$:

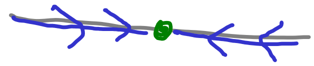
$x_0 = 0 \ldots$ stabilní

leč: 1) $x' = x^3$



nestabilní

2) $x' = -x^3$



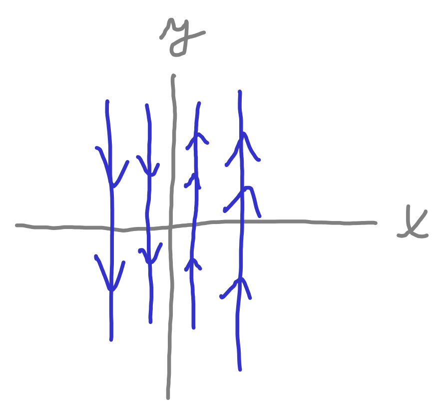
asympt. stabilní

Př.: $x' = -2y^3$ .. ? stabilita $(0,0)$

$y' = x$

linearizovaná úloha: $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = x \end{cases}$ $\Rightarrow$ $(0,0)$ nestabilní *)

tj. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\sigma(A) = \{0\}$

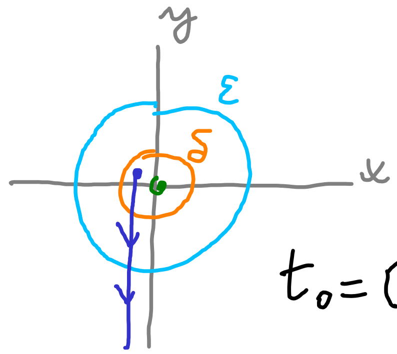


*) $\exists \varepsilon > 0 \ \exists t_0 \ \forall \delta > 0 \ \exists$ řešení $X = X(t)$ t.ž.

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$|X(t_0)| < \delta$, avšak

$|X(t)| \geq \varepsilon$, pro jisté $t \geq t_0$



$t_0 = 0$

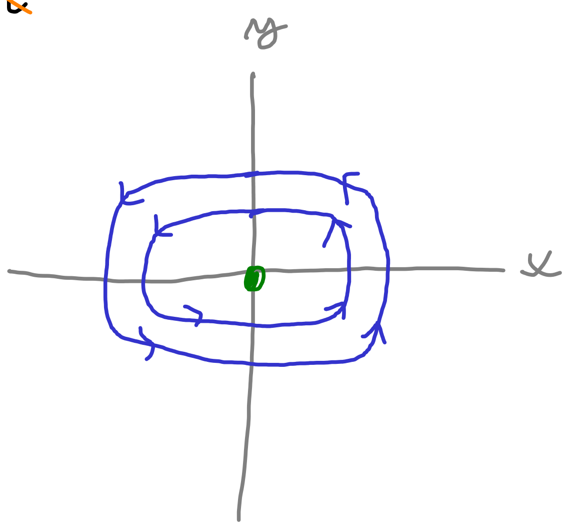
leč: tvrdíme $(0,0)$ je $\boxed{\text{stabilní}}$ pro původní úlohu:

$$\begin{cases} x' = -2y^3 \\ y' = x \end{cases}$$

Dk.: 1. integrál

**) viz komentář níže

$$\frac{\frac{dy}{\cancel{dt}}}{\frac{dx}{\cancel{dt}}} = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{-2y^3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{-2y^3} \quad ; \quad y = y(x)$$



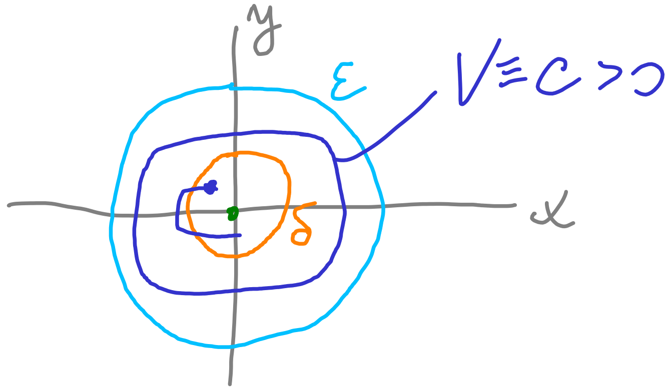
$$0 = x\,dx + 2y^3\,dy$$

$$\underline{\underline{C}} = \underbrace{\frac{x^2}{2} + \frac{y^4}{2}}_{= V = V(x,y)}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \forall t_0 \ \exists \delta > 0 \ \forall$ řešení $X = X(t)$ t.ž.

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$|X(t_0)| < \delta$ platí $|X(t)| < \varepsilon$, $\forall t \geq t_0$


y
ε
V = c > 0
δ
x