A. V závislosti na $a \neq 0$, $n \in N$ diskutujte stabilitu počátku pro rovnici

$$\dot{x} = ax^n + f(x)$$

kde $f(x) = o(x^n)$ pro $x \to 0$. (Návod: znaménko $\dot{x}$ v okolí počátku.) Zobecněte pro rovnici $\dot{x} = F(x)$, kde $F(x) \sim ax^n + f(x)$ pro $x \to 0$, pokud a, n, $f(x)$ jsou jako výše.

B. Vyšetřete stabilitu počátku systémů rovnic:

1.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax^3 + x^2 y \\ \dot{y} &= -y + y^2 + xy - x^3 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xy \\ \dot{y} &= -y + x^2 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3 + y^2 \\ \dot{y} &= -2y + x^2 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \sin x + x \sin y \\ \dot{y} &= \ln(1 - y) + \sin x^2 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 - 4xy + y^2 \\ \dot{y} &= -10y + x^2 y^2 + x^5 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \exp 2xy - \exp x^3 \\ \dot{y} &= \exp x^2 - \exp 2y \end{aligned}$$

Návod: ověřte existenci centrální variety tvaru $y = h(x)$; aproximujte $h(x)$ funkcí tvaru buď $\phi(x) = 0$ nebo $\phi(x) = cx^2$ pro vhodné c.

C. Studujte chování řešení v okolí počátku pro malá ϵ:

1.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \epsilon x - x^3 + xy \\ \dot{y} &= -y + y^2 - x^2 \end{aligned}$$

2. $\ddot{x} + \dot{x} + \epsilon x + x^3$ (substituce $y = \dot{x}$)

Návod: přidejte rovnici $\dot{\epsilon} = 0$ a ověřte, že existuje centrální varieta tvaru $y = h(x, \epsilon)$. Aproximujte jí vhodnou kvadratickou funkcí.