Optimální regulace - návody a výsledky.

Věta 1. (Princip maxima pro lineární časově optimální regulaci.) Nechť $\alpha : [0, \tau] \to [-1, 1]^m$ přivádí systém (tj. $x(t) \in R^n$, $M \in R^{n\times n}$, $N \in R^{n\times m}$)

$$\dot{x} = Mx + N\alpha$$

do počátku v optimálním čase τ. Označ $X(t) = \exp(Mt)$. Potom existuje nenulové $h \in R^n$ tak, že

$$h^T X^{-1}(t)N\alpha(t) = \max_{a\in[-1,1]^m} h^T X^{-1}(t)Na \tag{1}$$

platí pro s.v. $t \in (0, \tau)$.

Věta 2. (Princip maxima pro úlohu s pevným časem.) Nechť $\alpha : [0, T] \to A$, kde $A \subset R^m$ a $T > 0$ jsou dány, maximalizuje funkcionál

$$P[\alpha] = \int_0^T r(x(t), \alpha(t))\, dt + g(x(T))\,,$$

přičemž x řeší systém (tj. $x(t) \in R^n$, $f(x, a) : R^n \times R^m \to R^n$)

$$\dot{x} = f(x, \alpha)\,.$$

Potom existuje $p : [0, T] \to R^n$ řešení systému $(i = 1, \dots, n)$

$$\dot{p}_i(t) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\big(x(t), \alpha(t)\big)p_j(t) - \frac{\partial r}{\partial x_i}(x(t), \alpha(t)) \tag{2}$$

$$p_i(T) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x(T))\,, \tag{3}$$

takové, že

$$H(x(t), p(t), \alpha(t)) = \max_{a\in A} H(x(t), p(t), a) \tag{4}$$

platí pro s.v. $t \in (0, T)$ kde

$$H(x, p, a) = f(x, a) \cdot p + r(x, a)$$

je tzv. Hamiltonián.

Poznámky k úlohám.

1. Podle (1) je $\alpha(t) = \mathrm{sgn}(-h_1 t + h_2)$, tedy $\alpha = \pm 1$ a změna nastane nejvýše jednou. Jak vypadají řešení v rovině x, $y = \dot{x}$ pro $\alpha \equiv 1$ resp. $\alpha \equiv -1$?

2. BÚNO $(h_1, h_2) = (-\cos a, \sin a)$, potom $\alpha(t) = \mathrm{sgn}\sin(t + a)$, tj. optimální regulace střídá ± 1 s intervalem π. Pro $\alpha \equiv 1$ je uběhne řešení v rovině x, $y = \dot{x}$ polovinu kružnice se středem $(0, 1)$.

3. Rovnice (2) říká $\dot{p} = -1 - \alpha(kp - 1)$, podle (4) $\alpha = 0$ pro $kp < 1$, $\alpha = 1$ pro $kp > 1$. Konstruujte p z podmínky $p(T) = 0$ v čase zpět.

4. Soustava pro p vypadá $\dot{p_1} = (\mu - b\alpha)p_1 - c(1-\alpha)p_2$, $\dot{p_2} = \nu p_2$, $p_1(T) = 0$, $p_2(T) = 1$. Podle (4) je $\alpha = 1$ pokud $bp_1 > cp_2$ a $\alpha = 0$ jinak. Postupujte z času T zpět.

5. Z principu maxima $\alpha(t) = p(t)/2$, odtud soustava $\dot{x} = x + p/2$, $\dot{p} = 2x - p$.