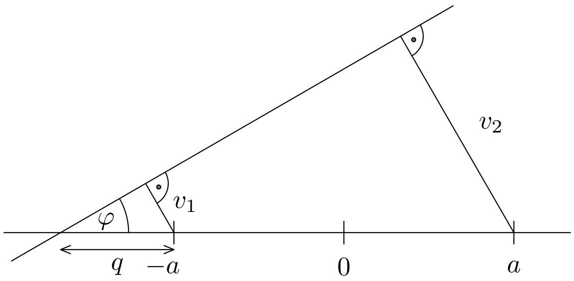
Bude to elipsa?

Jako parametrizaci zvolíme q, tj. vzdálenost mezi bodem $(-a, 0)$ a bodem, kde přímka protíná osu x. Nejprve si určíme podmínku pro vzdálenosti. Z obrázku vidíme, že $v_1 = q \sin\varphi$ a $v_2 = (q + 2a)\sin\varphi$. Platí pro ně ze zadání vztah

$$b^2 = v_1 v_2 = q(q + 2a)\sin^2\varphi. \tag{1}$$



Nyní už sepíšeme rovnici pro všechny přímky, které se budou lišit v parametru q. Všechny přímky mají směrnici $\operatorname{tg}\varphi$, tedy závislost $y(x)$ bude

$$y = \operatorname{tg}\varphi \cdot x + c,$$

kde c musíme určit a $\operatorname{tg}\varphi$ vyjádřit tak, aby celá rovnice závisela jen na q. Číslo c vypočteme ze znalosti funkční hodnoty v bodě $-q - a$, tam jsme si totiž zvolili, že je nulová.

$$0 = y(-q - a) = \operatorname{tg}\varphi \cdot (-q - a) + c \Rightarrow c = (q + a)\operatorname{tg}\varphi.$$

Teď už stačí jen vyjádřit $\operatorname{tg}\varphi$ pomocí q, k tomu použijeme vztah (1). Upravujeme

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\varphi}} \overset{(1)}{=} \frac{b}{\sqrt{q(q+a)}\sqrt{1 - \frac{b^2}{q(q+a)}}} = \frac{b}{\sqrt{q(q+a) - b^2}}.$$

Dostáváme tedy rovnici pro přímky ve tvaru (po dosazení za c a $\operatorname{tg}\varphi$)

$$y = \operatorname{tg}\varphi \cdot (x + a + q) = b(q^2 + 2qa - b^2)^{-\frac{1}{2}}(x + a + q).$$

A teď použijeme metodu obálek. Označme si

$$F = y - b(q^2 + 2qa - b^2)^{-\frac{1}{2}}(x + a + q) = 0.$$

Zároveň požadujeme nulovost parciální derivace F podle parametru q.

$$0 = \frac{\partial F}{\partial q} = b(q^2 + 2qa - b^2)^{-\frac{1}{2}}\left[(q^2 + 2qa - b^2)^{-1}(q + a)(x + a + q) - 1\right].$$

Parciální derivace je nulová jen když je nulová „hranatá závorka“, neboť $b > 0$. Sepišme si obě rovnice.

$$y - b(q^2 + 2qa - b^2)^{-\frac{1}{2}}(x + a + q) = 0,$$
$$(q^2 + 2qa - b^2)^{-1}(q + a)(x + a + q) - 1 = 0.$$

První z nich umocníme na druhou

$$y^2 = b^2(q^2 + 2qa - b^2)^{-1}(x + a + q)^2, \tag{2}$$
$$1 = (q^2 + 2qa - b^2)^{-1}(q + a)(x + a + q). \tag{3}$$

Z rovnice (3) snadno vypočítáme

$$q = -\frac{a^2 + xa + b^2}{x}.$$

Nyní podělíme rovnici (2) vztahem (3) a dosadíme za q.

$$\begin{aligned} y^2 &= b^2\frac{x + a + q}{a + q}, \\ \frac{y^2}{b^2} &= 1 + \frac{x}{a + q}, \\ \frac{y^2}{b^2} &= 1 + \frac{x}{a - (a^2 + xa + b^2)/x}, \end{aligned}$$

$$\frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dostali jsme rovnici pro elipsu s malou poloosou o velikosti b a velkou poloosou o velikosti $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Poznámka na závěr: $b > 0$, $\varphi \in (0, \pi/2]$, $q > 0$. Speciálně vyřešíme $\varphi = 0$, symetricky zbylé tři problémy ($q < 0$ a $\varphi \in [-\pi/2, 0)$).