Zajímavé příklady z teorie her

Dalibor Pražák

Katedra matematické analýzy MFF UK

http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼prazak/vyuka/

TEORIE HER:

TEORIE HER:

- matematický popis strategické nebo konfliktní situace

TEORIE HER:

- matematický popis strategické nebo konfliktní situace
- klíčové pojmy: „hra“, „hráč“, „strategie“, „výplata“

TEORIE HER:

- matematický popis strategické nebo konfliktní situace
- klíčové pojmy: „hra“, „hráč“, „strategie“, „výplata“
- studium teorie z nás nedělá lepší hráče

TEORIE HER:

- matematický popis strategické nebo konfliktní situace
- klíčové pojmy: „hra“, „hráč“, „strategie“, „výplata“
- studium teorie z nás nedělá lepší hráče
- užitek na vyšší úrovni: popis, analýza, porozumění „hře“

TEORIE HER:

- matematický popis strategické nebo konfliktní situace
- klíčové pojmy: „hra“, „hráč“, „strategie“, „výplata“
- studium teorie z nás nedělá lepší hráče
- užitek na vyšší úrovni: popis, analýza, porozumění „hře“
- aplikace: návrhy her, modifikace pravidel (aukce, volby, ...)

DEFINICE.

Hra (dvou hráčů) je:

DEFINICE.

Hra (dvou hráčů) je:

$\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2$ .... množina strategií 1. resp. 2. hráče

DEFINICE.

Hra (dvou hráčů) je:

$\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2$ .... množina strategií 1. resp. 2. hráče

$\varphi_1(S_1, S_2)$, $\varphi_2(S_1, S_2)$ .... výplatní funkce 1. resp. 2. hráče

DEFINICE.

Hra (dvou hráčů) je:

$\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2$ .... množina strategií 1. resp. 2. hráče

$\varphi_1(S_1, S_2)$, $\varphi_2(S_1, S_2)$ .... výplatní funkce 1. resp. 2. hráče

Pozn. Symetrická hra: $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_2$, $\varphi_1 = \varphi_2$

Příklad.

kámen – nůžky – papír

Příklad.

kámen – nůžky – papír

strategie: $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_2 = \{K, N, P\}$

Příklad.

kámen – nůžky – papír

strategie: $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_2 = \{K, N, P\}$

výplatní funkce: matice pro φ_1 — řádky S_1, sloupce S_2

	K	N	P
K	0	1	-1
N	-1	0	1
P	1	-1	0

Příklad.

kámen – nůžky – papír

strategie: $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_2 = \{K, N, P\}$

výplatní funkce: matice pro φ_1 — řádky S_1, sloupce S_2

	K	N	P
K	0	1	-1
N	-1	0	1
P	1	-1	0

Pozn. Jde o symetrickou hru s nulovým součtem ($\varphi_1 = -\varphi_2$).

Příklad.

cestující (hráč 1) a revizor (hráč 2)

Příklad.

cestující (hráč 1) a revizor (hráč 2)

strategie:

$\mathscr{S}_1 = \{L, \check{C}\}$ .... (s lístkem, nebo načerno)

$\mathscr{S}_2 = \{K, N\}$ .... (kontroluje nebo nekontroluje)

Příklad.

cestující (hráč 1) a revizor (hráč 2)

strategie:

$\mathscr{S}_1 = \{L, \check{C}\}$ .... (s lístkem, nebo načerno)

$\mathscr{S}_2 = \{K, N\}$ .... (kontroluje nebo nekontroluje)

cena lístku:	30
pokuta za jízdu načerno:	1000

Příklad.

cestující (hráč 1) a revizor (hráč 2)

strategie:

$\mathscr{S}_1 = \{L, \check{C}\}$ .... (s lístkem, nebo načerno)

$\mathscr{S}_2 = \{K, N\}$ .... (kontroluje nebo nekontroluje)

cena lístku:	30
pokuta za jízdu načerno:	1000
náklady na kontrolu:	10
bonus za černého pasažéra:	100

Příklad.

cestující (hráč 1) a revizor (hráč 2)

strategie:

$\mathscr{S}_1 = \{L, Č\}$ .... (s lístkem, nebo načerno)

$\mathscr{S}_2 = \{K, N\}$ .... (kontroluje nebo nekontroluje)

cena lístku:	30
pokuta za jízdu načerno:	1000
náklady na kontrolu:	10
bonus za černého pasažéra:	100

výplatní funkce: matice pro ${}^{\varphi_1}/_{\varphi_2}$ — řádky S_1, sloupce S_2

	K	N
L	${}^{-30}/_{-10}$	${}^{-30}/_{0}$
Č	${}^{-1000}/_{90}$	${}^{0}/_{0}$

KLÍČOVÝ POJEM: Nashovo ekvilibrium

KLÍČOVÝ POJEM: Nashovo ekvilibrium

Nashovo equilibrium je taková volba strategií jednotlivými hráči, že žádný z nich si nemůže polepšit pouze změnou své vlastní strategie (tj. za předpokladu, že soupeř svou strategii nemění).

KLÍČOVÝ POJEM: Nashovo ekvilibrium

Nashovo equilibrium je taková volba strategií jednotlivými hráči, že žádný z nich si nemůže polepšit pouze změnou své vlastní strategie (tj. za předpokladu, že soupeř svou strategii nemění).

Matematicky zapsáno: N.e. je dvojice (S_1, S_2) kde $S_1 \in \mathscr{S}_1$, $S_2 \in \mathscr{S}_2$ taková, že platí:

KLÍČOVÝ POJEM: Nashovo ekvilibrium

Nashovo equilibrium je taková volba strategií jednotlivými hráči, že žádný z nich si nemůže polepšit pouze změnou své vlastní strategie (tj. za předpokladu, že soupeř svou strategii nemění).

Matematicky zapsáno: N.e. je dvojice (S_1, S_2) kde $S_1 \in \mathscr{S}_1$, $S_2 \in \mathscr{S}_2$ taková, že platí:

$$\varphi_1(X, S_2) \leq \varphi_1(S_1, S_2) \qquad \text{pro každé } X \in \mathscr{S}_1$$

KLÍČOVÝ POJEM: Nashovo ekvilibrium

Nashovo equilibrium je taková volba strategií jednotlivými hráči, že žádný z nich si nemůže polepšit pouze změnou své vlastní strategie (tj. za předpokladu, že soupeř svou strategii nemění).

Matematicky zapsáno: N.e. je dvojice (S_1, S_2) kde $S_1 \in \mathscr{S}_1$, $S_2 \in \mathscr{S}_2$ taková, že platí:

$$\varphi_1(X, S_2) \leq \varphi_1(S_1, S_2) \qquad \text{pro každé } X \in \mathscr{S}_1$$

$$\varphi_2(S_1, Y) \leq \varphi_2(S_1, S_2) \qquad \text{pro každé } Y \in \mathscr{S}_2$$

KLÍČOVÝ POJEM: Nashovo ekvilibrium

Nashovo equilibrium je taková volba strategií jednotlivými hráči, že žádný z nich si nemůže polepšit pouze změnou své vlastní strategie (tj. za předpokladu, že soupeř svou strategii nemění).

Matematicky zapsáno: N.e. je dvojice (S_1, S_2) kde $S_1 \in \mathscr{S}_1$, $S_2 \in \mathscr{S}_2$ taková, že platí:

$$\varphi_1(X, S_2) \leq \varphi_1(S_1, S_2) \qquad \text{pro každé } X \in \mathscr{S}_1$$

$$\varphi_2(S_1, Y) \leq \varphi_2(S_1, S_2) \qquad \text{pro každé } Y \in \mathscr{S}_2$$

Proč je to dobrý pojem ekvilibria? (Opakování hry.)

Tvrzení.

Hra „kámen – nůžky – papír“ nemá žádné N.e.

Tvrzení.

Hra „kámen – nůžky – papír“ nemá žádné N.e.

Tvrzení. Hra „cestující a revizor“ nemá žádné N.e.

Tvrzení.

Hra „kámen – nůžky – papír“ nemá žádné N.e.

Tvrzení. Hra „cestující a revizor“ nemá žádné N.e.

Zobecnění hry — smíšené strategie (náhodná kombinace)

Tvrzení.

Hra „kámen – nůžky – papír“ nemá žádné N.e.

Tvrzení. Hra „cestující a revizor“ nemá žádné N.e.

Zobecnění hry — smíšené strategie (náhodná kombinace)

α .... pravděpodobnost, že si koupím lístek
$1 - \alpha$ .... pravděpodobnost, že jedu načerno

Tvrzení.

Hra „kámen – nůžky – papír“ nemá žádné N.e.

Tvrzení. Hra „cestující a revizor“ nemá žádné N.e.

Zobecnění hry — smíšené strategie (náhodná kombinace)

α . . . . pravděpodobnost, že si koupím lístek
$1 - \alpha$ . . . . pravděpodobnost, že jedu načerno
β . . . . pravděpodobnost, že revizor kontroluje
$1 - \beta$ . . . . pravděpodobnost, že revizor nekontroluje

Tvrzení.

Hra „kámen – nůžky – papír“ nemá žádné N.e.

Tvrzení. Hra „cestující a revizor“ nemá žádné N.e.

Zobecnění hry — smíšené strategie (náhodná kombinace)

α .... pravděpodobnost, že si koupím lístek
$1-\alpha$ .... pravděpodobnost, že jedu načerno
β .... pravděpodobnost, že revizor kontroluje
$1-\beta$ .... pravděpodobnost, že revizor nekontroluje

Tvrzení. V zobecněné hře „cestující vs. revizor“ existuje právě jedno N.e.

$$\alpha = 1 - N/B \qquad \beta = L/P,$$

L .... cena lístku
P .... pokuta
N .... náklady na kontrolu
B .... bonus za černého pasažéra

Tvrzení.

Hra „kámen – nůžky – papír“ nemá žádné N.e.

Tvrzení. Hra „cestující a revizor“ nemá žádné N.e.

Zobecnění hry — smíšené strategie (náhodná kombinace)

α .... pravděpodobnost, že si koupím lístek
$1-\alpha$ .... pravděpodobnost, že jedu načerno
β .... pravděpodobnost, že revizor kontroluje
$1-\beta$ .... pravděpodobnost, že revizor nekontroluje

Tvrzení. V zobecněné hře „cestující vs. revizor“ existuje právě jedno N.e.

$$\alpha = 1 - N/B \qquad \beta = L/P,$$

L .... cena lístku
P .... pokuta
N .... náklady na kontrolu
B .... bonus za černého pasažéra

Pro nás $L = 30$, $P = 1000$, $N = 10$ a $B = 100$ $\implies$ $\alpha = {}^{9}/_{10}$ a $\beta = {}^{3}/_{100}$.

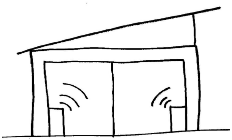
VĚZŇOVO DILEMA

VĚZŇOVO DILEMA

Dilema mezi altruismem (je žádoucí, ale mohu na něj doplatit) a zrádným (sobeckým) jednáním (nelíbí se nám, ale je výhodné).

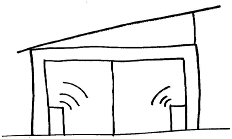
VĚZŇOVO DILEMA

Dilema mezi altruismem (je žádoucí, ale mohu na něj doplatit) a zrádným (sobeckým) jednáním (nelíbí se nám, ale je výhodné).



VĚZŇOVO DILEMA

Dilema mezi altruismem (je žádoucí, ale mohu na něj doplatit) a zrádným (sobeckým) jednáním (nelíbí se nám, ale je výhodné).



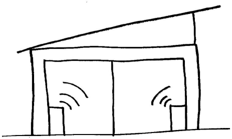
$\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_2 = \{A, Z\}$

$A \ldots$ zapnu své topení

$Z \ldots$ nezapnu své topení

VĚZŇOVO DILEMA

Dilema mezi altruismem (je žádoucí, ale mohu na něj doplatit) a zrádným (sobeckým) jednáním (nelíbí se nám, ale je výhodné).



$$\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_2 = \{A, Z\}$$

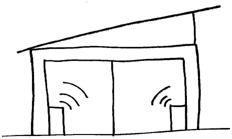
$A \ldots$ zapnu své topení

$Z \ldots$ nezapnu své topení

4 nebo 0 . . . . mám v pokoji teplo nebo zimu
0 nebo -2 nebo -5 . . . . netopím nebo spolutopím nebo topím sám

VĚZŇOVO DILEMA

Dilema mezi altruismem (je žádoucí, ale mohu na něj doplatit) a zrádným (sobeckým) jednáním (nelíbí se nám, ale je výhodné).



$\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_2 = \{A, Z\}$

$A \ldots$ zapnu své topení

$Z \ldots$ nezapnu své topení

4 nebo 0 . . . . mám v pokoji teplo nebo zimu
0 nebo -2 nebo -5 . . . . netopím nebo spolutopím nebo topím sám

	A	Z
A	2	-1
Z	4	0

VĚZŇOVO DILEMA:

– diskuse

VĚZŇOVO DILEMA:

– diskuse

	A	Z
A	2	-1
Z	4	0

VĚZŇOVO DILEMA:

– diskuse

	A	Z
A	2	-1
Z	4	0

Tvrzení. (Z, Z) je jediné N.e.

VĚZŇOVO DILEMA:

– diskuse

	A	Z
A	2	-1
Z	4	0

Tvrzení. (Z, Z) je jediné N.e.

Komentář. (Z, Z) je jediná situace, kdy je v domě zima.

VĚZŇOVO DILEMA:

– diskuse

	A	Z
A	2	-1
Z	4	0

Tvrzení. (Z, Z) je jediné N.e.

Komentář. (Z, Z) je jediná situace, kdy je v domě zima.

Případ (A, A) je lepší než (A, Z) nebo (Z, A) čistě z ekonomických důvodů (celkový/průměrný zisk).

VĚZŇOVO DILEMA:

– diskuse

	A	Z
A	2	-1
Z	4	0

Tvrzení. (Z, Z) je jediné N.e.

Komentář. (Z, Z) je jediná situace, kdy je v domě zima.

Případ (A, A) je lepší než (A, Z) nebo (Z, A) čistě z ekonomických důvodů (celkový/průměrný zisk).

Klíčová otázka: **jak docílit přesunu ze Z do A?**

VĚZŇOVO DILEMA:

– diskuse

	A	Z
A	2	-1
Z	4	0

Tvrzení. (Z, Z) je jediné N.e.

Komentář. (Z, Z) je jediná situace, kdy je v domě zima.

Případ (A, A) je lepší než (A, Z) nebo (Z, A) čistě z ekonomických důvodů (celkový/průměrný zisk).

Klíčová otázka: **jak docílit přesunu ze Z do A?**
Změna pravidel hry (úřední dohled, modifikace výplatních funkcí ...)

VĚZŇOVO DILEMA:

– diskuse

	A	Z
A	2	-1
Z	4	0

Tvrzení. (Z, Z) je jediné N.e.

Komentář. (Z, Z) je jediná situace, kdy je v domě zima.

Případ (A, A) je lepší než (A, Z) nebo (Z, A) čistě z ekonomických důvodů (celkový/průměrný zisk).

Klíčová otázka: **jak docílit přesunu ze Z do A?**
Změna pravidel hry (úřední dohled, modifikace výplatních funkcí ...)

STAČÍ PROSTÉ OPAKOVÁNÍ HRY!!!

VĚZŇOVO DILEMA s opakováním:

VĚZŇOVO DILEMA s opakováním:

Je dáno p číslo mezi 0 a 1 takové, že

1. hráči hrají jedno kolo hry

VĚZŇOVO DILEMA s opakováním:

Je dáno p číslo mezi 0 a 1 takové, že

1. hráči hrají jedno kolo hry
2. s pravděpodobností p jdi do bodu 1,
   s pravděpodobností $1 - p$ hra končí

VĚZŇOVO DILEMA s opakováním:

Je dáno p číslo mezi 0 a 1 takové, že

1. hráči hrají jedno kolo hry
2. s pravděpodobností p jdi do bodu 1,
   s pravděpodobností $1 - p$ hra končí

VĚZŇOVO DILEMA s opakováním:

Je dáno p číslo mezi 0 a 1 takové, že

1. hráči hrají jedno kolo hry
2. s pravděpodobností p jdi do bodu 1,
   s pravděpodobností $1 - p$ hra končí

Tvrzení. Průměrná délka hry $L = \frac{1}{1-p}$.

VĚZŇOVO DILEMA s opakováním:

Je dáno p číslo mezi 0 a 1 takové, že

1. hráči hrají jedno kolo hry
2. s pravděpodobností p jdi do bodu 1,
   s pravděpodobností $1 - p$ hra končí

Tvrzení. Průměrná délka hry $L = \frac{1}{1-p}$.

Důkaz.

$$
\begin{aligned}
L &= 1 + p(1 + p(1 + p(1 + \ldots ... \\
&= 1 + p + p^2 + p^3 + \ldots \\
&= \frac{1}{1-p}
\end{aligned}
$$

VĚZŇOVO DILEMA s opakováním

VĚZŇOVO DILEMA s opakováním

Strategie pro opakovanou hru jsou mnohem komplexnější (mohu brát v potaz minulá kola hry).

VĚZŇOVO DILEMA s opakováním

Strategie pro opakovanou hru jsou mnohem komplexnější (mohu brát v potaz minulá kola hry).

Příklady strategií:

$^*A$ . . . . skalní altruista (hraje vždy A)

VĚZŇOVO DILEMA s opakováním

Strategie pro opakovanou hru jsou mnohem komplexnější (mohu brát v potaz minulá kola hry).

Příklady strategií:

$*A$ . . . . skalní altruista (hraje vždy A)
$*Z$ . . . . zatvrzelý zrádce (hraje vždy Z)

VĚZŇOVO DILEMA s opakováním

Strategie pro opakovanou hru jsou mnohem komplexnější (mohu brát v potaz minulá kola hry).

Příklady strategií:

$^*A$ .... skalní altruista (hraje vždy A)
$^*Z$ .... zatvrzelý zrádce (hraje vždy Z)
N .... nedůvěřivá spolupráce (přechází od A do Z, je-li zrazen)

VĚZŇOVO DILEMA s opakováním

Strategie pro opakovanou hru jsou mnohem komplexnější (mohu brát v potaz minulá kola hry).

Příklady strategií:

$^*A$ .... skalní altruista (hraje vždy A)
$^*Z$ .... zatvrzelý zrádce (hraje vždy Z)
N .... nedůvěřivá spolupráce (přechází od A do Z, je-li zrazen)
O .... oplácející (odpouštějící s.) – hraje A a poté to, co soupeř v předchozím kole

VĚZŇOVO DILEMA s opakováním

Strategie pro opakovanou hru jsou mnohem komplexnější (mohu brát v potaz minulá kola hry).

Příklady strategií:

$^*A$ . . . . skalní altruista (hraje vždy A)
$^*Z$ . . . . zatvrzelý zrádce (hraje vždy Z)
N . . . . nedůvěřivá spolupráce (přechází od A do Z, je-li zrazen)
O . . . . oplácející (odpouštějící s.) – hraje A a poté to, co soupeř v předchozím kole

Tvrzení. Pro vězňovo dilema s pravděpodobností opakování p platí:

VĚZŇOVO DILEMA s opakováním

Strategie pro opakovanou hru jsou mnohem komplexnější (mohu brát v potaz minulá kola hry).

Příklady strategií:

$^*A$ .... skalní altruista (hraje vždy A)
$^*Z$ .... zatvrzelý zrádce (hraje vždy Z)
N .... nedůvěřivá spolupráce (přechází od A do Z, je-li zrazen)
O .... oplácející (odpouštějící s.) – hraje A a poté to, co soupeř v předchozím kole

Tvrzení. Pro vězňovo dilema s pravděpodobností opakování p platí:

- $({}^*Z, {}^*Z)$ je Nashovo ekvilibrium.

VĚZŇOVO DILEMA s opakováním

Strategie pro opakovanou hru jsou mnohem komplexnější (mohu brát v potaz minulá kola hry).

Příklady strategií:

$^*A$ .... skalní altruista (hraje vždy A)
$^*Z$ .... zatvrzelý zrádce (hraje vždy Z)
N .... nedůvěřivá spolupráce (přechází od A do Z, je-li zrazen)
O .... oplácející (odpouštějící s.) – hraje A a poté to, co soupeř v předchozím kole

Tvrzení. Pro vězňovo dilema s pravděpodobností opakování p platí:

- $(^*Z, ^*Z)$ je Nashovo ekvilibrium.
- Je-li $p \geq {}^1/_2$, je také (N, N) Nashovo ekvilibrium.

VĚZŇOVO DILEMA s opakováním

Strategie pro opakovanou hru jsou mnohem komplexnější (mohu brát v potaz minulá kola hry).

Příklady strategií:

$^*A$ .... skalní altruista (hraje vždy A)
$^*Z$ .... zatvrzelý zrádce (hraje vždy Z)
N .... nedůvěřivá spolupráce (přechází od A do Z, je-li zrazen)
O .... oplácející (odpouštějící s.) – hraje A a poté to, co soupeř v předchozím kole

Tvrzení. Pro vězňovo dilema s pravděpodobností opakování p platí:

- $({}^*Z, {}^*Z)$ je Nashovo ekvilibrium.
- Je-li $p \geq {}^1/_2$, je také (N, N) Nashovo ekvilibrium.
- Je-li $p \geq {}^2/_3$, je dokonce (O, O) Nashovo ekvilibrium.

DYNAMIKA HER V ČASE

DYNAMIKA HER V ČASE

Dosud jsme prováděli pouze **statickou** analýzu.

DYNAMIKA HER V ČASE

Dosud jsme prováděli pouze **statickou** analýzu.

Nelze odpovědět některé otázky (např. co se děje v případě, že existuje více ekvilibrií).

DYNAMIKA HER V ČASE

Dosud jsme prováděli pouze **statickou** analýzu.

Nelze odpovědět některé otázky (např. co se děje v případě, že existuje více ekvilibrií).

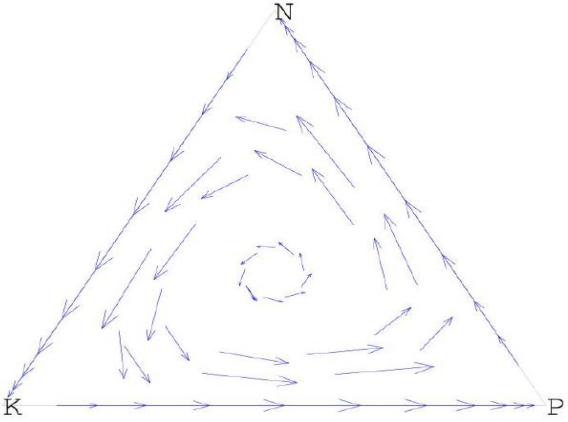
Replikátorová rovnice – vývoj velké populace hráčů v čase.

DYNAMIKA HER V ČASE

Dosud jsme prováděli pouze **statickou** analýzu.

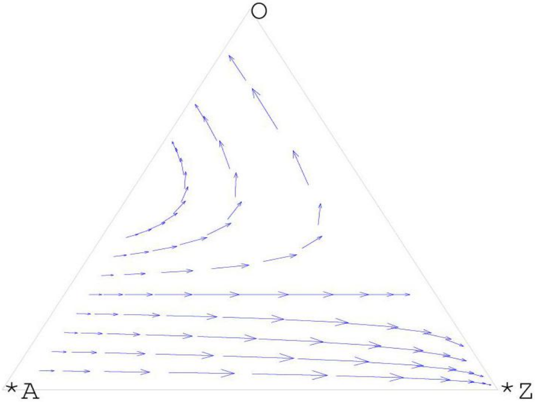
Nelze odpovědět některé otázky (např. co se děje v případě, že existuje více ekvilibrií).

Replikátorová rovnice – vývoj velké populace hráčů v čase.



$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x - 2y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(2x + y - 1)$$
$$z = 1 - (x + y)$$

OPAKOVANÉ VĚZŇOVO DILEMA: dynamika v čase



$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x - 2y + \frac{4}{3}xy)$$
$$\frac{dy}{dt} = xy(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}y)$$
$$z = 1 - (x + y)$$