Elementární důkaz Lerchovy věty

Lemma 1 *Nechť* $\varphi(x)$ *je spojitá v* $[0,1]$ *a*

$$\int_0^1 \varphi(x)x^m\,dx = 0\,, \qquad \forall m \geq 0 \text{ celé.} \tag{1}$$

Potom $\varphi(x) = 0$.

Důkaz. Pomocí Weiestrassovy věty[1] naleznu posloupnost polynomů $p_n(x)$ takových, že $p_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ v $[0,1]$. Tudíž

$$\int_0^1 p_n(x)\varphi(x)\,dx \to \int_0^1 |\varphi(x)|^2\,dx\,.$$

Díky (1) je však $\int_0^1 p_n(x)\varphi(x)\,dx = 0$ pro každé n. □

Věta 1 (Lerch, 1903) *Nechť* $f(t) \in L^1_+$ *a nechť existuje* p_0 *takové, že*

$$\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,dt = 0\,, \qquad \forall p \geq p_0.$$

Potom $f(t) = 0$ *s.v.*

Důkaz. Stačí dokonce slabší předpoklad

$$\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-(p_0+n)t}\,dt = 0\,, \qquad \forall n \geq 0 \text{ celé.} \tag{2}$$

Označme

$$b(t) = \int_t^\infty f(s)\,\mathrm{e}^{-p_0 s}\,ds\,.$$

Tedy $b(t)$ je absolutně spojitá v $[0,\infty)$, $b'(t) = -f(t)\,\mathrm{e}^{-p_0 t}$ s.v. a díky (2)

$$b(0) = 0\,. \tag{3}$$

Případným zvětšením p_0 zajistíme, že

$$g(t) = f(t)\,\mathrm{e}^{-(p_0-1)t} \in L^1(0,\infty)\,.$$

[1] Viz např. Jarníkův Diferenciální počet II, Věta 180.

Odtud plyne odhad na pokles $b(t)$ v nekonečnu

$$|b(t)| = |\int_t^\infty g(s)\,\mathrm{e}^{-s}\; ds| \le \mathrm{e}^{-t} \int_t^\infty g(s)\,ds \le c\,\mathrm{e}^{-t}\;. \tag{4}$$

Integrací per-partes nyní dostáváme

$$\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-p_0 t}\,\mathrm{e}^{-nt}\; dt = \big[- b(t)\,\mathrm{e}^{-nt} \big]_0^\infty - n \int_0^\infty b(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\; dt\,.$$

Z (2)–(4) vyplývá

$$\int_0^\infty b(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\; dt = 0\,, \qquad \forall n \ge 1 \text{ celé.}$$

Substitucí $x = \mathrm{e}^{-t}$ obdržíme

$$\int_0^1 \varphi(x) x^{n-1}\,dx = 0\,, \qquad \forall n \ge 1 \text{ celé.}$$

$$\varphi(x) = b(-\ln x)\,.$$

Dodefinováním nulou na krajích je $\varphi(x)$ spojitá v $[0,1]$. K ověření spojitosti v 0 zprava užijeme (4):

$$|\varphi(x)| \le c \exp(-(-\ln x)) = cx\,.$$

Podle Lemmatu 1 je $\varphi(x) = 0$, tedy $b(t) = 0$ a odtud závěr. $\square$