Základní věta kalkulu

Naším cílem je následující tvrzení: nechť $f \in AC([a,b])$. Potom $f'(x)$ existuje skoro všude, $f' \in L^1(a,b)$, a

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx\,.$$

Lemma 1. Neklesající funkce je diferencovatelná (tj. má konečnou derivaci) skoro všude.

Lemma 2. Nechť $f : [a,b] \to R$ je neklesající. Potom $f' \in L^1(a,b)$ a

$$\int_a^b f'(x)\,dx \le f(b) - f(a)\,.$$

3. Definice: systém uzavřených, nedegenerovaných intervalů $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ pokrývá množinu $M \subset R$ ve Vitaliho smyslu, jestliže $\forall x \in M\ \forall \varepsilon > 0\ \exists I_\alpha$ tak, že $x \in I_\alpha$ a $|I_\alpha| < \varepsilon$.

Věta 4. (Vitaliho.) Nechť M je omezená množina, nechť $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ pokrývají M ve Vitaliho smyslu.
Pak existuje spočetný, disjunktní podsystém $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ tak, že $\lambda(M \setminus \cup_n I_n) = 0$.

Lemma 5. Nechť $f : [a,b] \to R$ je rostoucí funkce. Nechť $E \subset [a,b]$ je taková množina, že $|f'(x)| \le K$ pro každé $x \in E$. Potom

$$\lambda^* f(E) \le K \lambda^* E\,.$$