1. Úvod. Reálná čísla.

Věta A1. (Algebraické vlastnosti $\mathbb{R}$.) Existuje množina reálných čísel $\mathbb{R}$, která obsahuje prvky 0 a 1, a jsou na ní definovány operace '$\cdot$' (násobení) a '$+$' (sčítání) tak, že platí (pro $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$):
(i) $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$
(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
(iii) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
(iv) $0 + x = x$, $1 \cdot x = x$
(v) $0 \cdot x = 0$ a naopak: $x \cdot y = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$
(vi) $\forall x, z\ \exists! y$ tak, že $x + y = z$, toto y značíme $z - x$
(vii) $\forall z$, $\forall x \neq 0\ \exists! y$ tak, že $x \cdot y = z$, toto y značíme z/x

Věta A2. (Uspořádání $\mathbb{R}$.) Na množině $\mathbb{R}$ je definována relace '$<$' (menší než) tak, že platí (pro $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$):
(i) nastane právě jedna z možností: $x = y$ nebo $x < y$ nebo $y < x$
(ii) $x < y\ \&\ y < z \implies x < z$
(iii) $x < y \implies x + z < y + z$
(iv) $0 < x\ \&\ 0 < y \implies 0 < x \cdot y$

Definice. (Význačné podmnožiny $\mathbb{R}$.)
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ (přirozená čísla)
$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, \dots\}$ (celá čísla)
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$ (racionální čísla)
$(a, b) = \{x;\ a < x < b\}$
$[a, b] = \{x;\ a \le x \le b\}$
$(a, b] = \{x;\ a < x \le b\}$
$[a, b) = \{x;\ a \le x < b\}$
$(a, +\infty) = \{x;\ x > a\}$
$[a, +\infty) = \{x;\ x \ge a\}$

Definice. Pro $x \in \mathbb{R}$ definuji $|x|$ (absolutní hodnota x) jako

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Lemma 1.1. Nechť $a \ge 0$. Potom $|x| \le a$ právě když $-a \le x \le a$.

Věta 1.1. (Trojúhelníková nerovnost.) Pro $\forall x, y \in \mathbb{R}$ platí:
(i) $|x + y| \le |x| + |y|$
(ii) $|x - y| \le |x| + |y|$
(iii) $|x + y| \ge ||x| - |y||$
(iv) $|x - y| \ge ||x| - |y||$

Definice. (Odmocnina.)
1. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je sudé a $a \geq 0$. Potom existuje jednoznačně určené $b \geq 0$ tak, že $b^n = a$. Značíme $b = \sqrt[n]{a}$.
2. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je liché a $a \in \mathbb{R}$. Potom existuje jednoznačně určené $b \in \mathbb{R}$ tak, že $b^n = a$. Značíme $b = \sqrt[n]{a}$.

Výrok dne. Není (obecně) pravda, že $\sqrt{x^2} = x$ - to platí jen pro $x \geq 0$, pro $x < 0$ máme $\sqrt{x^2} = -x$.

Věta 1.2. Existují iracionální čísla.

Věta A3. (Vlastnosti $\mathbb{N}$.)
(i) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $n > x$
(ii) (princip indukce) - Nechť $M \subset \mathbb{N}$ splňuje: (a) $1 \in M$ (b) $n \in M \implies n + 1 \in M$. Potom $M = \mathbb{N}$.

Věta 1.3. Každý otevřený interval obsahuje nekonečně mnoho racionálních a nekonečně mnoho iracionálních čísel.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$.
Prvek $x \in M$ se nazve maximum (největší prvek) M, pokud pro $\forall y \in M$ platí $y \leq x$. Značíme $x = \max M$.
Prvek $x \in M$ se nazve minimum (nejmenší prvek) M, pokud pro $\forall y \in M$ platí $y \geq x$. Značíme $x = \min M$.
Číslo K se nazve horní odhad M, pokud pro $\forall x \in M$ platí $x \leq K$.
Číslo L se nazve dolní odhad M, pokud pro $\forall x \in M$ platí $x \geq K$.
Množina se nazve shora omezená, má-li nějaký horní odhad; zdola omezená, má-li nějaký dolní odhad; omezená, je-li omezená shora i zdola.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo S se nazve supremum množiny M, značíme $S = \sup M$, jestliže
(i) $\forall x \in M$ platí $x \leq S$
(ii) $\forall S' < S\ \exists y \in M$ tak, že $y > S'$
Číslo s se nazve infimum množiny M, značíme $s = \inf M$, jestliže
(i) $\forall x \in M$ platí $x \geq s$
(ii) $\forall s' > s\ \exists y \in M$ tak, že $y < s'$

Věta A4. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná a shora omezená. Potom existuje $S \in \mathbb{R}$ tak, že $S = \sup M$.

Věta A4'. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná a zdola omezená. Potom existuje $s \in \mathbb{R}$ tak, že $s = \inf M$.

Definice. (Komplexní čísla.) Symbolem $\mathbb{C}$ značíme množinu všech čísel tvaru $x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$ a i je imaginární jednotka (platí $i^2 = -1$.) Je-li $z = x + iy$, píšeme $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$ (reálná, resp. imaginární část z).

Definice. (Rozšířená reálná čísla.) Klademe $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{(+)\infty, -\infty\}$. Uspořádání a početní operace s prvky $\pm\infty$ definujeme takto:

- $\forall x \in \mathbb{R}$ je $-\infty < x < \infty$, dále $-\infty < \infty$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ je $x+\infty = \infty$, $x-\infty = -\infty$, dále $\infty+\infty = \infty$, $-\infty-\infty = -\infty$
- $\forall x > 0$ je $x \cdot \infty = \infty$, $x \cdot (-\infty) = -\infty$, dále $\infty \cdot \infty = \infty$
- $\forall x < 0$ je $x \cdot \infty = -\infty$, $x \cdot (-\infty) = \infty$, dále $-\infty \cdot (-\infty) = \infty$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ je $\dfrac{x}{\infty} = 0$, $\dfrac{x}{-\infty} = 0$

Nedefinováno zůstává: $\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\dfrac{x}{0}$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

2. Reálné funkce. Limita a spojitost.

Definice. Nechť M, N jsou množiny. Funkcí (zobrazením) f z M do N se rozumí libovolný předpis, který každému prvku z M přiřadí právě jeden prvek z N. Značíme $f : M \to N$, $x \mapsto f(x)$.
Funkce je prostá, pokud $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$. Pro $A \subset M$ definuji obraz A jako

$$f(A) = \{y \in N;\ \exists x \in N \text{ tak, že } f(x) = y\}$$

a pro $B \subset N$ definuji vzor B jako

$$f^{-1}(B) = \{x \in M;\ f(x) \in B\}\,.$$

Funkce je 'na' (zobrazuje M na N), pokud $f(M) = N$.
Je-li $f : M \to N$ prostá a na, řekneme, že je vzájemně jednoznačná. Pak lze definovat inverzní funkci $f_{-1} : N \to M$, která prvku $y \in N$ přiřadí ten (jednoznačně určený) prvek $x \in M$, že $f(x) = y$.
Je-li $f : M \to N$, a $A \subset M$, pak restrikcí (zúžením) f na A rozumím zobrazení, která má stejný předpis jako f, ale uvažuji ho jenom pro $x \in A$. Značíme $f|_A$.
Je-li $f : M \to N$, $g : N \to K$, definujeme složené zobrazení (superpozici) $g \circ f : M \to K$ předpisem $x \mapsto g(f(x))$.
Občas píšeme $f : M \to N$, ačkoliv $f(x)$ není definováno pro úplně všechna $x \in M$. Pak značí D_f (definiční obor f) množinu těch $x \in M$, pro něž $f(x)$ definováno je, a H_f (obor hodnot) značí $f(D_f)$.

Definice. Nechť $\delta > 0$. Pro $x_0 \in \mathbb{R}$ definujeme
$U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ... kruhové δ-okolí x_0

$P(x_0,\delta) = U(x_0,\delta)\setminus\{x_0\} = (x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ ... prstencové (redukované) δ-okolí x_0
$U_+(x_0,\delta) = [x_0,x_0+\delta)$ ... pravé kruhové δ-okolí x_0
$U_-(x_0,\delta) = (x_0-\delta,x_0]$ ... levé kruhové δ-okolí x_0
$P_+(x_0,\delta) = (x_0,x_0+\delta)$ ... pravé prstencové δ-okolí x_0
$P_-(x_0,\delta) = (x_0-\delta,x_0)$ ... levé prstencové δ-okolí x_0
Dále definujeme
$U(\infty,\delta) = (\frac{1}{\delta},\infty]$, $P(\infty,\delta) = (\frac{1}{\delta},\infty)$
$U(-\infty,\delta) = [-\infty,-\frac{1}{\delta})$, $P(-\infty,\delta) = (-\infty,-\frac{1}{\delta})$
$U_-(\infty,\delta) = U(\infty,\delta)$, $P_-(\infty,\delta) = P(\infty,\delta)$, $U_+(-\infty,\delta) = U(-\infty,\delta)$, $P_+(-\infty,\delta) = P(-\infty,\delta)$.
Pravé okolí ∞, levé okolí $-\infty$ nedefinujeme.

Poznámky.
• pozoruji: $\delta_1 < \delta_2 \implies U(x_0,\delta_1)\subset U(x_0,\delta_2)$ ... čím menší δ, tím menší okolí (platí i u $\pm\infty$)
• jediný rozdíl mezi $U(x_0,\delta)$ a $P(x_0,\delta)$: bod x_0
• pro $x_0\in\mathbb{R}$ platí:

$$U(x_0,\delta) = \big\{x\in\mathbb{R};\ |x-x_0|<\delta\big\}$$
$$P(x_0,\delta) = \big\{x\in\mathbb{R};\ 0<|x-x_0|<\delta\big\}$$

• píšeme $U(x_0)$ místo $U(x_0,\delta)$, pokud na δ nezáleží; obrat "na jistém $P(x_0)$ platí..." je zkratka za "existuje $\delta>0$ tak, že pro každé $x\in P(x_0,\delta)$ platí..."

Věta 2.1. (Hausdorffův princip oddělení.) Nechť $x_0,\ x_1\in\mathbb{R}^*$, $x_0\neq x_1$. Potom existuje $\delta>0$ tak, že $U(x_0,\delta)\cap U(x_1,\delta)=\emptyset$. Speciálně $x_0\notin U(x_1,\delta)$.

Definice. Nechť $x_0\in\mathbb{R}^*$, nechť $f(x)$ je definována na jistém $P(x_0,\delta)$. Číslo $A\in\mathbb{R}^*$ se nazve limitou $f(x)$ v bodě x_0, jestliže

$$\big(\forall\varepsilon>0\big)\big(\exists\delta>0\big)\big[x\in P(x_0,\delta) \implies f(x)\in U(A,\varepsilon)\big]\,.$$

Značíme $f(x)\to A$ pro $x\to x_0$, nebo $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.
Terminologie: pokud $A\in\mathbb{R}$, jde o limitu vlastní (konečnou), pro $A=\pm\infty$ je limita nevlastní.

Poznámky.
• limita v x_0 nezávisí na $f(x_0)$, f nemusí být v x_0 ani definována
• názorně: x blízko x_0, ale různé od $x_0 \implies f(x)$ blízké (nebo rovné) A
• ekvivalentní zápis:

$$\big(\forall\varepsilon>0\big)\big(\exists\delta>0\big)\big[f\big(P(x_0,\delta)\big)\subset U(A,\varepsilon)\big]\,.$$

speciálně pro x_0, $A \in \mathbb{R}$:

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big[0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon\big]\,.$$

• limita (pokud existuje) je nejvýše jedna

Příklady. ① $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$
② $\lim_{x\to 0} x^{-2} = \infty$
③ Dirichletova funkce

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

nemá limitu v žádném bodě.

Definice. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, nechť $f(x)$ je definována na jistém $P_+(x_0, \delta)$ (respektive $P_-(x_0, \delta)$). Číslo $A \in \mathbb{R}^*$ se nazve limitou $f(x)$ v bodě x_0 zprava (resp. zleva), jestliže

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big[x \in P_+(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(A, \varepsilon)\big]$$

respektive

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big[x \in P_-(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(A, \varepsilon)\big]\,.$$

Značíme $f(x) \to A$ pro $x \to x_0+$, $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = A$, resp. $f(x) \to A$ pro $x \to x_0-$, $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = A$.

Příklady.
① pro funkci signum

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

platí: $\lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$
② $\lim\limits_{x\to 0\pm} x^{-1} = \pm 1$

Věta 2.2. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:
(1) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existuje a rovná se A
(2) limity $\lim_{x\to x_0+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ existují a rovnají se témuž A

Úmluva. Reálnou funkcí rozumíme funkci z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, tj. nepřipouštíme $\pm\infty$ v argumentu nebo hodnotě funkce. Dále symbolem $\exists\delta > 0$ rozumíme $\exists\delta \in (0, \infty)$.

Definice. Funkce $f(x)$ se nazve omezená na množině M, pokud existuje $K > 0$ tak, že $|f(x)| \le K$ pro $\forall x \in M$.

Příklady.
① $\sin x$ je omezená v $\mathbb{R}$
② $f(x) = \dfrac{1}{x}$ není omezená na žádném $P(0)$

Lemma 2.1. (1) Nechť $f(x)$ má v bodě x_0 vlastní limitu. Potom $f(x)$ je omezená na jistém $P(x_0)$.
(2) Nechť $f(x)$ má v bodě x_0 limitu (i nevlastní), různou od 0. Potom $f(x)$ je na jistém $P(x_0)$ "odražená od nuly", tj.

$$\big(\exists\delta > 0\big)\big(\exists\Delta > 0\big)\big[x \in P(x_0, \delta) \implies |f(x)| > \Delta\big] .$$

Věta 2.3. (Aritmetika limit - 1. verze.) Nechť $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ pro $x \to x_0$, kde A, $B \in \mathbb{R}$. Potom
(1) $f(x) + g(x) \to A + B$
(2) $f(x) - g(x) \to A - B$
(3) $f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$
(4) pokud $B \neq 0$, tak $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{A}{B}$
pro $x \to x_0$.

Věta 2.4. Nechť $f(x)$ je omezená na jistém $P(x_0)$, nechť $g(x) \to 0$ pro $x \to x_0$. Potom $f(x) \cdot g(x) \to 0$ pro $x \to x_0$.

Poznámka. Platí jednostranné verze uvedených vět, např.:
Jestliže $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ pro $x \to x_0+$, pak $f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$ pro $x \to x_0+$.
Jestliže $f(x)$ je omezená na jistém $P_-(x_0)$ a $g(x) \to 0$ pro $x \to x_0-$, pak $f(x) \cdot g(x) \to 0$ pro $x \to x_0-$.
Atd.

Definice. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, nechť $f(x)$ je definována na jistém $U(x_0)$. Řekneme, že $f(x)$ je spojitá v x_0, jestliže

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big[x \in U(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)\big] .$$

Ekvivalentní zápisy:

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big[f\big(U(x_0, \delta)\big) \subset U(f(x_0), \varepsilon)\big]$$
$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big[|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big]$$

Věta 2.5. (Vztah limity a spojitosti.) Následující tvrzení jsou ekvivalentní:
(1) $f(x)$ je spojitá v x_0
(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existuje a rovná se $f(x_0)$

Stručně řečeno: spojité funkce jsou takové, že limitu $x \to x_0$ spočítám dosazením $x = x_0$.

Příklady.
① polynom, tj. funkce tvaru $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, kde $a_k \in \mathbb{R}$ jsou konstanty, je spojitý v každém $x_0 \in \mathbb{R}$
② racionální funkce, tj. funkce tvaru $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, kde $p(x)$, $q(x)$ jsou polynomy, je spojitá v každém $x_0 \in \mathbb{R}$, ve kterém $q(x_0) \neq 0$
③ funkce $\sin x$, $\cos x$, $\exp x$ jsou spojité v každém bodě z $\mathbb{R}$; funkce $\log x$ je spojitá v každém bodě z $(0, \infty)$ - uvidíme později
④ funkce $\sqrt{x}$ je spojitá v každém bodě z $(0, \infty)$; uvidíme později, že $\sqrt[n]{x}$ je vždy spojitá (ve svém definičním oboru)
⑤ funkce $\operatorname{sgn} x$ je spojitá všude mimo $x = 0$
⑥ funkce $F(x) = x \cdot D(x)$, kde $D(x)$ je Dirichletova funkce, je spojitá v $x = 0$ a nikde jinde

Věta 2.6. (Limita superpozice) Nechť $f(x) \to y_0$ pro $x \to x_0$, nechť $g(y) \to A$ pro $y \to y_0$, kde A, x_0, $y_0 \in \mathbb{R}^*$. Nechť je dále splněn alespoň jeden z následujících předpokladů:
(a) $g(y)$ je spojitá v y_0
(b) $\exists \delta > 0$ tak, že $f(x) \neq y_0$ pro $\forall x \in P(x_0, \delta)$
Potom $g(f(x)) \to A$ pro $x \to x_0$.

Příklady.
① $\sqrt{x^3 - 3x + 1} \to \sqrt{3}$ pro $x \to 2$
② $\dfrac{\sin(x + x^2)}{x} \to 1$ pro $x \to 0$
③ !! bez předpokladu (a) nebo (b) se nelze obejít: definuji $f(x) = 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(y) = 0$ pro $y \neq 0$ a $g(0) = 1$. Potom $f(x) \to 0$ pro $x \to 0$, $g(y) \to 0$ pro $y \to 0$, avšak $g(f(x)) \to 1$ pro $x \to 0$.

Poznámka. Výrok $f(x) \to \infty$ pro $x \to x_0$ můžeme ekvivalentně napsat jako

$$\big(\forall K > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in P(x_0, \delta) \implies f(x) > K\big].$$

Podobně $f(x) \to -\infty$ pro $x \to x_0$ je ekvivalentní

$$\big(\forall L < 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in P(x_0, \delta) \implies f(x) < L\big].$$

Věta 2.7. (Aritmetika limit - obecná verze.) Nechť $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ pro $x \to x_0$, kde A, $B \in \mathbb{R}^*$. Potom
(1) $f(x) + g(x) \to A + B$
(2) $f(x) - g(x) \to A - B$

(3) $f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$
(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{A}{B}$
pro $x \to x_0$, má-li výraz napravo smysl.

Příklady. ① $\frac{1}{x^2+1} \to \frac{1}{\infty \cdot \infty + 1} = 0$ pro $x \to \infty$
② $x^3 + 3x^2 + 4 = x^3(1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}) \to (-\infty)^3(1 + \frac{3}{-\infty} + \frac{4}{(-\infty)^3}) = -\infty$ pro $x \to -\infty$

Poznámka. Proč nedefinuji některé výrazy, např. $\frac{\infty}{\infty}$? Protože když $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$, nelze obecně říci, co dělá $\frac{f(x)}{g(x)}$. – Operace s ∞ jsou definovány právě tak, aby platila Věta 2.7.

Věta 2.8. Nechť $f(x) \to 0$ pro $x \to x_0$.
(1) Je-li navíc $f(x) > 0$ na jistém $P(x_0)$, pak $\frac{1}{f(x)} \to \infty$ pro $x \to x_0$.
(2) Je-li naopak $f(x) < 0$ na jistém $P(x_0)$, pak $\frac{1}{f(x)} \to -\infty$ pro $x \to x_0$.

Příklady. ① $\frac{\sin\sqrt{x}}{x} \to \infty$ pro $x \to 0+$
② $\frac{1}{x+x^2} \to -\infty$ pro $x \to 0-$

Věta 2.9. (Zachování nerovnosti v limitě.) Nechť $f(x) \to a$ pro $x \to x_0$. Nechť existuje $A \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) \leq A$ na jistém $P(x_0)$. Potom $a \leq A$.

Poznámky. • platí zrcadlová verze s $\geq$ místo $\leq$
• neplatí verze s ostrou nerovností: $f(x) = 1 - \frac{1}{x} < 1$ na $P(\infty)$, avšak $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1 \not< 1$
• souhrně: neostrá nerovnost se v limitě zachová, ostrá se může změnit v rovnost

Věta 2.7. (O dvou policajtech.) Nechť $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ jsou definovány na jistém $P(x_0)$.
(1) Nechť $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ platí na jistém $P(x_0)$, a nechť $g(x) \to a$, $h(x) \to a$ pro $x \to x_0$, kde $a \in \mathbb{R}$. Potom $f(x) \to a$ pro $x \to x_0$.
(2) Nechť $g(x) \leq f(x)$ na na jistém $P(x_0)$, nechť $g(x) \to \infty$ pro $x \to x_0$. Potom $f(x) \to \infty$ pro $x \to x_0$.
(3) Nechť $f(x) \leq h(x)$ na na jistém $P(x_0)$, nechť $h(x) \to -\infty$ pro $x \to x_0$. Potom $f(x) \to -\infty$ pro $x \to x_0$.

Příklady. ① $\frac{x^2+1}{\lfloor x^2 \rfloor + 1} \to 1$ pro $x \to \infty$, kde

$$\lfloor y \rfloor = \max\left\{k \in \mathbb{Z} : k \leq y\right\}$$

je tzv. celá část y.
② $\cos x + x \to -\infty$ pro $x \to -\infty$

Věta 2.11. Nechť $f(x)$ je monotónní v intervalu (a,b). Potom existuje $\lim_{x\to a+} f(x)$ a $\lim_{x\to b-} f(x)$.

Definice. Nechť $f(x)$ je definována na jistém $U_+(x_0)$ (respektive $U_-(x_0)$), kde $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že $f(x)$ je spojitá v x_0 zprava (resp. zleva), jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in U_+(x_0,\delta) \implies f(x) \in U(f(x_0),\varepsilon)\big]$$

respektive

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in U_-(x_0,\delta) \implies f(x) \in U(f(x_0),\varepsilon)\big].$$

Ekvivalentní zápisy (pro spojitost zprava):

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[f\big(U_+(x_0,\delta)\big) \subset U(f(x_0),\varepsilon)\big]$$
$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x_0 \le x < x_0 + \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big]$$

Věta 2.12.
(1) $f(x)$ je spojitá v x_0 zprava, právě když $\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$.
(2) $f(x)$ je spojitá v x_0 zleva, právě když $\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$.
(3) $f(x)$ je spojitá v x_0, právě když je tam spojitá zleva i zprava.

Příklad. $f(x) = \lfloor x \rfloor$ je v 0 spojitá zprava, nespojitá zleva.

Definice. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f(x) : I \to \mathbb{R}$. Řekneme, že $f(x)$ je spojitá v I (na I), jestliže pro každé $x_0 \in I$ platí:

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in U(x_0,\delta) \cap I \implies f(x) \in U(f(x_0),\varepsilon)\big].$$

Poznámka. U intervalu rozlišujeme vnitřní a krajní body. Bod $x_0 \in I$ je vnitřní, právě když existuje $\delta > 0$ tak, že $U(x_0,\delta) \subset I$. Krajní bod může, ale nemusí být prvkem intervalu.
Tedy (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ a $[a,b]$ jsou intervaly s krajními body a, b. Vnitřními body jsou ve všech čtyřech případech body z (a,b).

Věta 2.13. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f(x) : I \to \mathbb{R}$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:
(1) $f(x)$ je spojitá v I
(2) $f(x)$ je spojitá v každém vnitřním bodě I; pokud levý krajní bod je prvkem I, je v něm spojitá zprava; pokud pravý krajní bod je prvkem I, je v něm spojitá zleva
(3) $f(x)$ je spojitá zprava v každém bodě I, který není pravý krajní, a je spojitá zleva v každém bodě I, který není levý krajní

Věta 2.14. Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou spojité v intervalu I. Potom funkce $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ jsou spojité v I. Jestliže $g(x)\neq 0$ pro $\forall x\in I$, je také funkce $\frac{f(x)}{g(x)}$ spojitá v I.

Věta 2.15. (Spojitost superpozice.) Nechť $f(x)$ je spojitá v I, nechť $g(y)$ je spojitá v J, kde I, $J\subset\mathbb{R}$ jsou intervaly. Nechť $f(I)\subset J$. Potom funkce $(g\circ f)(x)$ je spojitá v I.

Poznámka. Ihned z definice plyne: je-li $f(x)$ spojitá v I, a $\tilde{I}\subset I$, pak $f(x)$ je spojitá v $\tilde{I}$.

Věta 2.16. (Darbouxova.) Nechť $f(x)$ je spojitá v I, kde $I\subset\mathbb{R}$ je interval. Nechť γ leží mezi $f(a)$, $f(b)$, kde a, $b\in I$. Potom mezi a, b leží c takové, že $f(c)=\gamma$.

Poznámka. Větu A4 lze zobecnit takto: Nechť $M\subset\mathbb{R}$ je neprázdná. Potom existuje $S\in\mathbb{R}^*$ tak, že $S=\sup M$.

Lemma 2.2. (Charakterizace intervalu.) Nechť neprázdná $M\subset\mathbb{R}$ má následující vlastnost:
[*] Jsou-li α, $\beta\in M$ a číslo γ leží mezi α a β, pak také $\gamma\in M$.
Potom M je interval.

Důsledek. Nechť $I\subset\mathbb{R}$ je interval a $f(x):I\to\mathbb{R}$ je spojitá. Potom $f(I)$ je také interval. (Spojitý obraz intervalu je interval.)

Věta 2.17. (O inverzní funkci.) Nechť $I\subset\mathbb{R}$ je interval a $f(x)$ je spojitá, ryze monotónní v I. Označ $J=f(I)$. Potom J je interval, $f(x):I\to J$ je vzájemně jednoznačná a $f_{-1}(y):J\to I$ je spojitá a ryze monotónní.

Důsledek. Důkaz Věty B (o odmocnině), navíc dostáváme, že $\sqrt[n]{x}$ je pro sudé n spojitá v $[0,\infty)$, pro liché n je spojitá v $\mathbb{R}$.

Lemma 2.3. (1) Nechť $f(x)$ je definována na jistém $P(\infty)$. Potom

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{y\to 0+} f(1/y)\,.$$

(2) Nechť $f(x)$ je definována na jistém $P(-\infty)$. Potom

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{y\to 0-} f(1/y)\,.$$

Rovnost chápu takto: existuje-li jedna limita, existuje i druhá a rovnají se.

Poznámky. Nechť $I\subset\mathbb{R}$ je interval. Funkci $F(x):I\to\mathbb{C}$ ztotožním s dvojicí funkcí $f_1(x):I\to\mathbb{R}$, $f_2(x):I\to\mathbb{R}$, kde $F(x)=f_1(x)+if_2(x)$, neboli $f_1(x)=\operatorname{Re}F(x)$, $f_2(x)=\operatorname{Im}F(x)$.

Limitu definuji takto: $F(x) \to A \in \mathbb{C}$ pro $x \to x_0$, jestliže $\operatorname{Re} F(x) \to \operatorname{Re} A$, $\operatorname{Im} F(x) \to \operatorname{Im} A$ pro $x \to x_0$.
Spojitost analogicky: $F(x)$ je spojitá (v bodě, na intervalu), jestliže funkce $\operatorname{Re} F(x)$, $\operatorname{Im} F(x)$ jsou spojité.
Tímto přechodem k reálné resp. imaginární části dokážeme např. zobecnění Věty 2.3. pro A, $B \in \mathbb{C}$.

3. Elementární funkce.

Věta C. Existují funkce $\sin(x)$ a $\cos(x)$ z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ a číslo $\pi \in (0, \infty)$ tak, že platí:

1. $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ pro $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$,
   $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ pro $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$;
2. $\sin(-x) = -\sin(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $\cos(-x) = \cos(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$;
3. funkce $\sin(x)$, $\cos(x)$ jsou spojité v $\mathbb{R}$;
4. funkce $\sin(x)$ je rostouci v $[0, \pi/2]$ a $\sin(0) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$;
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

Funkce $\sin(x)$, $\cos(x)$ jsou těmito vlastnostmi určeny jednoznačně.

Z 1–5 lze vyvodit všechny další známé vlastnosti funkcí $\sin x$ a $\cos x$.

- $\cos 0 = 1$, neboť $1 = \sin(\pi/2 + 0) = \sin(\pi/2)\cos 0 + \cos(\pi/2)\sin 0 = \cos 0 + 0$ (dle 1, 4)
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, neboť $1 = \cos 0 = \cos(x + (-x)) = \cos(x)\cos(-x) - \sin(x)\sin(-x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$ (dle 1, 2, 4 a předchozího bodu)
- $|\sin(x)| \leq 1$, $|\cos(x)| \leq 1$ v $\mathbb{R}$ (dle předchozího bodu)
- $\cos(\pi/2) = 0$, $\cos(\pi) = -1$, $\sin(-\pi/2) = -1$
  (dobrovolné domácí cvičení)
- $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$, (dle 1 a předchozího)
- funkce $\sin(x)$, $\cos(x)$ jsou 2π-periodické (dle předchozího)

- funkce $\sin(x)$, $\cos(x)$ lze vzájemně nahradit:

  $\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$

  $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$

  (dle 1)

- $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

  $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

  - tyto vzorce odvodíme následujícím trikem: položíme $x := (a+b)/2$, $y := (a-b)/2$. Pak $a = x + y$, $b = x - y$ a užijeme vzorce 1.

- další užitečné vzorce:

  $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

  $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

  $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

  $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

- základní limita pro cos: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Věta D. Existuje funkce $\ln(x)$ z $(0,\infty)$ do $\mathbb{R}$ taková, že

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ pro $\forall x,\ y \in (0,\infty)$;
2. $\ln(x)$ je rostoucí a spojitá na $(0,\infty)$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

   Funkce $\ln(x)$ je těmito vlastnostmi jednoznačně určena.

Z 1–3 plynou další vlastnosti funkce $\ln(x)$:

- $\ln 1 = 0$, neboť $\ln 1 = \ln(1.1) = \ln 1 + \ln 1$
- $\ln(1/x) = -\ln(x)$, neboť $0 = \ln 1 = \ln(x \cdot 1/x) = \ln(x) + \ln(1/x)$
- $\ln(x^n) = n\ln(x)$ pro $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$
- $\ln(\sqrt[k]{x}) = (1/k)\ln(x)$ pro $k \in \mathbb{N}$, $x > 0$, neboť $\ln(x) = \ln((\sqrt[k]{x})^k) = k\ln(\sqrt[k]{x})$

- $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$. Chceme ukázat, že

$$\big(\forall K > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in P(\infty, \delta) \implies \ln x > K\big]\,.$$

  Nechť $K > 0$ je dáno: protože $\ln(x)$ je rostoucí, je $\ln 2 > \ln 1 = 0$ a tedy existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $n \ln 2 > K$. Položme $\delta = 1/2^n$.

  Potom $x \in P(\infty, \delta) \implies x > 2^n \implies \ln x > n \ln 2 > K$.

- $\lim_{x\to 0+} = -\infty$, neboť

$$\lim_{x\to 0+} \ln(x) = \lim_{y\to\infty} \ln(1/y) = \lim_{y\to\infty} [-\ln(y)] = -\infty.$$

- $\ln((0,\infty)) = \mathbb{R}$. Obor hodnot je interval (ze spojitosti); podle předchozího je shora i zdola neomezený.

Věta E. Existuje funkce $\exp(x) : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ taková, že platí:

1. $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ pro $\forall x,\, y \in \mathbb{R}$;
2. $\exp(x)$ je spojitá a rostoucí v $\mathbb{R}$;
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\exp(x) - 1}{x} = 1$.

Funkce $\exp(x)$ je navíc vlastnostmi 1–3 jednoznačně určena.

Samozřejmě funkce $\ln x$ a $\exp x$ jsou vzájemně inverzní. Větu E můžeme také dokázat z Věty D tak, že položíme $\exp = (\ln)_{-1}$ – všechny vlastnosti $\exp(x)$ pak plynou z vlastností $\ln(x)$ a z toho, ze jde o funkce vzájemně inverzní:

- $\exp(x)$ je rostoucí, neboť $\ln(x)$ je rostoucí
- $\exp(x)$ zobrazuje $\mathbb{R}$ vzájemně jednoznačně na $(0, \infty)$
- vlastnost 1 plyne z vlastnosti 1 funkce $\ln(x)$, Věta D
- limita sub 3 plyne ze základní limity pro $\ln(x)$ (vlastnost 3 ve Větě D) a ze spojitosti funkce $\exp(x)$

Funkce $\exp(x)$ má tyto další vlastnosti (dokažte sami):

- $\exp(0) = 1$

- $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

Definice. (Obecná mocnina.) Pro $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$ definuji $x^a = \exp(a \ln x)$. Dále definuji $x^0 = 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, speciálně též $0^0 = 1$.

Poznámky. Jak chápeme symbol x^a?

- pro $a = n \in \mathbb{N}$ je $x^a = x \cdot x \dots x$ (násobeno n-krát)
- pro $-a = n \in \mathbb{N}$ je $x^a = 1/x^{-a}$ a užiji předchozí definice
- $x^0 = 1$
- pokud $a \notin \mathbb{Z}$, nezbývá než použít definici $x^a = \exp(a \ln x)$ (která ovšem pro $a \in \mathbb{Z}$ dává stejný výsledek jako tři předchozí)

Symbol $\sqrt[k]{x}$ má zvláštní význam, určený Větou B.
Rozdíly a souvislosti: pokud $x > 0$, platí všechno tak, jak očekáváme: $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, $(x^a)^b = x^{ab}$ atd.
Pokud ovšem $x < 0$, objeví se rozdíly: $\sqrt[3]{-1} = 1$, avšak $(-1)^{\frac{1}{3}}$ není definováno. Podobně $[(-1)^2]^{\frac{1}{4}} = 1^{\frac{1}{4}} = 1$, avšak $(-1)^{2\frac{1}{4}} = (-1)^{\frac{1}{2}}$ není definováno.

Definice. (Další elementární funkce.)
① $\arcsin = \big(\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}\big)_{-1}$
② $\arccos = \big(\cos|_{[0,\pi]}\big)_{-1}$
③ $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
④ $\operatorname{arctg} x = \big(\operatorname{tg}_{(-\pi/2,\pi/2)}\big)_{-1}$
⑤ $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $x \neq k\pi$

Definice. Funkce se nazve (na daném definičním oboru) elementární, jestliže je to:
(1) polynom, racionální funkce, odmocnina
(2) sin, cos, exp, ln
(3) arcsin, arccos, arctg
(4) jakákoliv další funkce, která vznikne z předchozích konečným opakováním operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání.

Poznámky.

• funkce $\sinh x = \frac{1}{2}(\exp x - \exp(-x))$ (hyperbolický sinus) je zjevně elementární. Funkce k ní inverzní (zvaná argsinh) ovšem také, protože $\operatorname{argsinh} y = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$
• ve skutečnosti se všechny elementární funkce dají vytvořit pomocí exp a ln, pokud povolíme komplexní argumenty: např. $\sin x = \frac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix))$, $\arcsin x = -i\ln(ix + \sqrt{1-x^2})$.
• příklad funkce, která není elementární (na žádném intervalu): Dirichletova funkce

4. Derivace

Definice. Nechť $f(x)$ je definována na jistém $U(x_0)$. Pokud existuje limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

nazveme ji derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0.
Značíme $f'(x_0)$, $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ nebo $\big(f(x)\big)'|_{x=x_0}$.
Terminologie: pokud $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, jde o derivaci vlastní (konečnou), pro $f'(x_0) = \pm\infty$ je derivace nevlastní.

Poznámky. • ekvivalentní definice derivace:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

• $f(x) = g(x)$ na jistém $U(x_0)$ implikuje $f'(x_0) = g'(x_0)$
• geometrický význam: směrnice tečny grafu funkce
• derivováním vznikne z funkce $f(x)$ nová funkce $f'(x)$, která má dovoleno nabývat i hodnot $\pm\infty$

Příklady. 1 $c' = 0$
2 $\big(x^n\big)' = nx^{n-1}$ pro $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
3 $\big(1/x^n\big)' = -n/x^{n+1}$ pro $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$
4 $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$
5 $(\ln x)' = 1/x$ pro $x > 0$
6 $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$
7 $\operatorname{sgn}'(0) = \infty$

Definice. Nechť $f(x)$ je definována na jistém $U_+(x_0)$ (respektive $U_-(x_0)$.) Pokud existuje limita

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

respektive

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,,$$

nazveme ji derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0 zprava (resp. zleva.)
Značíme $f'_+(x_0)$ nebo $\big(f(x)\big)'_+|_{x=x_0}$ respektive $f'_-(x_0)$ nebo $\big(f(x)\big)'_-|_{x=x_0}$
Opět rozlišujeme vlastní a nevlastní derivaci.

Poznámky. • ekvivalentní definice jednostranných derivací:

$$\lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\qquad\text{respektive}\qquad\lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,.$$

• z Věty 2.2 plyne ekvivalence následujících tvrzení:
(1) $f'(x_0)$ existuje a rovná se A
(2) $f'_+(x_0)$ a $f'_-(x_0)$ existují a rovnají se A

Příklady.
① $|x|'=\operatorname{sgn} x$ pro $x\neq 0$; derivace v 0 neexistuje, neboť $(|x|)'_\pm|_{x=0}=\pm 1$
② $\big(\sqrt{x}\big)'_+|_{x=0}=\infty$

Věta 4.1. Nechť $f(x)$ má v x_0 vlastní derivaci. Pak $f(x)$ je v x_0 spojitá.

Poznámky. • důležité je "vlastní" - $\operatorname{sgn}(x)$ má v 0 derivaci (rovnou ∞), ale není tam spojitá
• platí jednostranné verze: $f(x)$ má v x_0 vlastní derivaci zprava (zleva) $\Longrightarrow$ $f(x)$ je v x_0 spojitá zprava (zleva)
• obrácená implikace zdaleka neplatí: např. $|x|$ je spojitá v 0, ale nemá tam derivaci. Lze dokonce sestrojit funkci, která je spojitá všude, ale derivaci (ani jednostrannou) nemá nikde

Věta 4.2. Nechť $f(x)$, $g(x)$ mají vlastní derivaci v x_0. Potom
(1) $\big(f+g\big)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$
(2) $\big(f-g\big)'(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0)$
(3) $\big(fg\big)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$
(4) jestliže $g(x_0)\neq 0$, pak $\big(\frac{f}{g}\big)'(x_0)=\frac{1}{[g(x_0)]^2}\big\{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)\big\}$

Poznámky. • platí pro jednostranné derivace
• lze použít na vícenásobné součty, součiny atd.; např. $\big(fgh\big)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)h(x_0)+f(x_0)g'(x_0)h(x_0)+f(x_0)g(x_0)h'(x_0)$
• v případě nevlastních derivací nemusí platí, třebaže má pravá strana smysl: polož $f(x)=1/x$ pro $x\neq 0$ a $f(0)=1$. Potom $f'(0)=\infty$, a tedy u vzorce

$$\big(f\cdot f\big)'(0)=f(0)f'(0)+f(0)f'(0)$$

je pravá strana ∞, avšak derivace funkce $f \cdot f$ v bodě 0 neexistuje

Příklady.
① $\operatorname{tg}' x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
② $\big(e^x \sin x\big)' = e^x(\cos x - \sin x)$

Lemma 4.1. Nechť $f(x_0) \neq 0$ (může být i nevlastní). Potom $f(x) \neq f(x_0)$ na jistém $P(x_0)$.

Věta 4.3. (Derivace složené funkce.) Nechť $f(x)$ má vlastní derivaci v x_0, nechť $g(y)$ má vlastní derivaci v bodě $f(x_0)$. Potom

$$\big(g \circ f\big)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)\,.$$

Příklady.
① $\big[\cos(x^2)\big]' = -\sin(x^2) \cdot 2x$, $x \in \mathbb{R}$
② $\big(\sqrt{x^2+1}\big)' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$
③ $\big[f(ax+b)\big]' = af'(ax+b)$ pro každé x takové, že $f'(y)$ má v bodě $ax+b$ derivaci
④ $\big\{x^x\big\}' = x^x(1+\ln x)$, $x > 0$
⑤ $|f(x)|' = f'(x)\operatorname{sgn}\big\{f(x)\big\}$, pokud $f(x) \neq 0$ a $f'(x)$ existuje vlastní

Věta 4.4. (Derivace inverzní funkce.) Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, nechť $f(x)$ je spojitá, ryze monotónní v $\mathbb{R}$. Označ $J = f(I)$, a $\varphi(y) : J \to I$ je funkce inverzní k $f(x)$. Nechť $y_0 \in J$ je vnitřní bod. Potom:
(1) Jestliže $f'(\varphi(y_0)) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak $\varphi(y_0) = \dfrac{1}{f'(\varphi(y_0))}$.
(2) Jestliže $f'(\varphi(y_0)) = \pm\infty$, pak $\varphi'(y_0) = 0$.
(3) Jestliže $f'(\varphi(y_0)) = 0$, pak $\varphi(y_0) = \infty$ pokud $f(x)$ je rostoucí, a $\varphi(y_0) = -\infty$ pokud $f(x)$ je klesající.

Příklady. ① $(\arcsin y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, $y \in (-1,1)$

② $(\operatorname{arctg} y)' = \dfrac{1}{1+y^2}$, $y \in \mathbb{R}$

③ Pokud $n \geq 2$ je sudé, tak $\big(\sqrt[n]{y}\big)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$, $y > 0$

Pokud $n \geq 3$ je liché, tak $\big(\sqrt[n]{y}\big)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ pro $y \neq 0$, a $\big(\sqrt[n]{y}\big)'|_{y=0} = \infty$.

5. Primitivní funkce.

Kdybychom byli přespříliš svědomití,
neexistovala by vůbec matematika.

Úmluva. V celé kapitole jsou I a J otevřené intervaly.

Definice. Nechť $F(x)$, $f(x) : I \to \mathbb{R}$. Řekneme, že $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$ v intervalu I, jestliže $F'(x) = f(x)$ pro $\forall x \in I$. Značíme

$$\int f(x)\,dx = F(x) \qquad \text{v } I\,.$$

Terminologie: $F(x)$ se také nazývá neurčitý integrál k $f(x)$, $f(x)$ je integrand, x je integrační proměnná.

Příklady. ① $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ v $\mathbb{R}$, $n \geq 0$ celé
② $\int \dfrac{dx}{x^n} = \dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$ v $(-\infty, 0)$ a v $(0, \infty)$, $n \geq 2$ celé
③ $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|$ v $(-\infty, 0)$ a v $(0, \infty)$; obecněji $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$ v I, pokud $f'(x)$ existuje vlastní a $f(x) \neq 0$ všude v I
④ $\int e^x\,dx = e^x$, $\int \sin x\,dx = -\cos x$, $\int \cos x\,dx = \sin x$, vše v $\mathbb{R}$
⑤ $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$ v $(-1, 1)$, $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$ v $\mathbb{R}$

Věta 5.1. (Linearita integrálu.)
(1)

$$\int af(x) + bg(x)\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$$

v každém I, kde mají smysl integrály vpravo;
(2) Jestliže $\int f(y)\,dy = F(y)$ v J, pak

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$$

v každém I takovém, že $\{ax + b : \ x \in I\} \subset J$.

Věta 5.2. (Integrace per-partes.) Nechť $u(x)$, $v(x)$ mají vlastní derivace v $\forall x \in I$. Potom

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx \qquad \text{v } I\,.$$

Příklady. ① $\int x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\ln x$ v $(0, \infty)$
② označme $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Tedy $I_1 = \operatorname{arctg} x$ v $\mathbb{R}$, a integrací per-partes odvodíme rekurentní vzorec

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n \qquad n \in N\,.$$

Věta 5.3. (1. věta o substituci.) Nechť $\int g(y)\,dy = G(y)$ v J, a nechť $f(x) : I \to J$ má vlastní derivaci v $\forall x \in I$. Potom

$$\int g(f(x))f'(x)\,dx = G(f(x)) \qquad \text{v } I.$$

Příklady. ① $\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2}$ v $\mathbb{R}$
② $\int \cos^5 x\,dx = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x$ v $\mathbb{R}$

Rozklad polynomů. Každý (nenulový) polynom $Q(x)$ lze rozložit

$$Q(x) = A\prod_{j=1}^{k}(x-a_j)^{p_j}$$

kde $a_j \in \mathbb{C}$ se nazývají kořeny, p_j jejich násobnosti. Platí $\sum_{j=1}^{k} p_j$ rovná se stupeň $Q(x)$.
Důsledek: každý (nenulový) polynom je roven nule v nejvýše konečně bodech; pokud se dva polynomy shodují v nekonečně bodech, jsou nutně totožné (mají stejné koeficienty.)
Pokud má $Q(x)$ reálné koeficienty a $a = \alpha + i\beta$ je kořen násobnosti p, tak $\bar{a} = \alpha - i\beta$ je také kořen (stejné násobnosti) a platí

$$(x-a)^p(x-\bar{a})^p = \big[(x-a)(x-\bar{a})\big]^p = \big[x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2\big]^p,$$

přičemž posledně uvedený polynom druhého stupně nemá tedy žádné reálné kořeny.
Tedy každý polynom s reálnými koeficienty lze rozložit

$$Q(x) = A\prod_{j=1}^{m}(x-a_j)^{p_j}\prod_{k=1}^{n}\big(x^2 + b_k x + c_k\big)^{q_k}, \qquad (*)$$

kde A, a_j, b_k, c_k jsou reálná čísla, tj. a_j jsou reálné kořeny $Q(x)$ násobnosti p_j, zatímco polynomy $x^2 + b_k x + c_k$ skrývají dvojici komplexně sdružených kořenů násobnosti q_k.

Věta F. (Rozklad na parciální zlomky.) Nechť $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy a stupeň P je menší než stupeň Q. Nechť $Q(x)$ má rozklad (*). Potom existují jednoznačně určená čísla A_{jr}, B_{ks} a $C_{ks} \in \mathbb{R}$ tak, že

$$R(x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{p_j}\frac{A_{jr}}{(x-a_j)^s} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{q_k}\frac{B_{ks}x + C_{ks}}{(x^2 + b_k x + c_k)^s}$$

platí pro každé x kde $Q(x) \neq 0$.

Integrace racionální funkce. Je-li dána $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, pak:

1. Pokud stupeň P je větší nebo roven stupni Q, dělením převedu na tvar

$$R(x) = p(x) + \frac{\tilde{P}(x)}{Q(x)}\,,$$

kde $p(x)$, $\tilde{P}(x)$ jsou polynomy a stupeň $\tilde{P}$ je menší než stupeň Q.

2. Funkci $\dfrac{\tilde{P}(x)}{Q(x)}$ rozložím podle Věty F.

3. Integruji jednotlivé členy rozkladu.

Příklad.

$$\begin{aligned}\int \frac{3x}{x^3-1}\,dx &= \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{-x+1}{x^2+x+1}\,dx \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

platí v $(-\infty, 1)$ a v $(1, \infty)$.

Věta 5.4. (2. věta o substituci.) Nechť $f(x) : I \to \mathbb{R}$, nechť $\varphi(t) : J \to I$ je vzájemně jednoznačná a $\varphi'(t)$ existuje konečná a nenulová pro $\forall t \in J$. Jestliže

$$\int f\bigl(\varphi(t)\bigr)\varphi'(t)\,dt = G(t) \qquad \text{v } J\,,$$

pak

$$\int f(x)\,dx = G\bigl(\varphi_{-1}(x)\bigr) \qquad \text{v } I\,.$$

Poznámky. • 1. věta o substituci - schematicky:

$$\int g\bigl(f(x)\bigr)f'(x)\,dx \;\left|\begin{array}{c} y = f(x) \\ dy = f'(x)\,dx \end{array}\right| = \int g(y)\,dy = G(y) = G\bigl(f(x)\bigr)\,.$$

Používá se v případě, že integrand má speciální tvar, tj. složená funkce krát derivace vnitřní funkce. Substituovaná funkce $f(x)$ nemusí být prostá.

• 2. věta o substituci - schematicky:

$$\int f(x)\,dx \left|\begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \end{array}\right| = \int f\bigl(\varphi(t)\bigr)\varphi'(t)\,dt = F(t) = F\bigl(\varphi_{-1}(x)\bigr)\,.$$

V tomto případě substituovaná funkce $\varphi(t)$ musí být vzájemně jednoznačná a $\varphi'(t) \neq 0$. Druhá věta o substituci se používá hlavně ve standardních situacích, viz dále.

Typové substituce. V dalším je $R = R(u,v)$ racionální funkce dvou promměných, tj. R je z u, v vytvořena operacemi $+$, $-$, $\cdot$ a $/$.
①

$$\int R\Big(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)\, dx\,.$$

Substituce $t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ vede na integraci racionální funkce.
Příklad:

$$\int \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}\,.$$

Polož $t = \sqrt{x-1}$, tj. $x = \varphi(t) = t^2+1$, $\varphi'(t) = 2t$ - předpoklady Věty 5.4 splněny ($I = (1,\infty)$, $J = (0,\infty)$); dostáváme

$$\int \frac{2\,dt}{(t+1)^2} = 2\ln(t+1) + \frac{2}{t+1} \quad \text{v } I.$$

Po zpětné substituci je výsledek $2\ln(1+\sqrt{x-1}) + 2/(1+\sqrt{x-1})$ v $(1,\infty)$.
②

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx\,.$$

Používá se substituce $t = \operatorname{tg}(x/2)$, tj. $x = \varphi(t) = 2\operatorname{arctg} x$. Odsud

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt\,,$$

což vede opět na integraci racionální funkce. Pozor: substituce dává výsledek jen pro $x \in (-\pi,\pi)$.
Příklad:

$$\int \frac{dx}{2+\cos x}\,;$$

vede na integrál

$$\int \frac{2\,dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\Big(\frac{t}{\sqrt{3}}\Big)\,.$$

Tedy

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\Big(\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}}\Big)\,;$$

platí v $(-\pi, \pi)$ a díky periodicitě v každém intervalu $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$. Pokud chci primitivní funkci na delším intervalu, musím výsledek provést slepení (zespojitění) výsledné funkce

$$F_0(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\big(\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}}\big) .$$

Například funkce

$$F_1(x) = \begin{cases} F_0(x), & x \in (-\pi, \pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}, & x = \pi \\ F_0(x) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, & x \in (\pi, 3\pi) \end{cases}$$

je primitivní k $f(x) = 1/(2+\cos x)$ v intervalu $(-\pi, 3\pi)$. Pro $x \neq \pi$ je $F_1'(x) = f(x)$ zjevné, v bodě $x = \pi$ to elegantně vyřešíme pomocí pozdější věty.
③

$$\int R\big(\exp(ax)\big)\, dx$$

se převede na integraci racionální funkce substitucí $t = \exp(ax)$, $dx = dt/at$.
④

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx .$$

Pokud $a < 0$, lze BÚNO předpokládat, že $p(x) = ax^2 + bx + c$ má reálné kořeny. Přepíšeme

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)} = \pm(x-\mu)\sqrt{\frac{a(x-\lambda)}{x-\mu}} ,$$

čímž obdržíme integrál typu ①.
Pro $a > 0$ použijeme Eulerovu substituci

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x .$$

Ta vede opět na racionální funkci, navíc lze dokázat, že splňuje předpoklady Věty 5.4. na všech intervalech, kde je $p(x) > 0$.

Poznámka. (Integrál a derivace komplexních funkcí.)
Nechť $F(x)$, $f(x) : I \to \mathbb{C}$. Potom $F'(x) = f(x)$ značí

$$\big\{ \operatorname{Re} F(x) \big\}' = \operatorname{Re} f(x) , \qquad \big\{ \operatorname{Im} F(x) \big\}' = \operatorname{Im} f(x) .$$

Stejný význam má $\int f(x)\, dx = F(x)$.

Díky vzorečku (dokážeme později při přesnějším zavedení elementárních funkcí)

$$\exp[(\alpha + i\beta)x] = \exp(\alpha x)[\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)]$$

vyplývá, že $\exp(ax)' = a\exp(ax)$, a také

$$\int \exp(ax)\,dx = \frac{\exp(ax)}{a}$$

platí pro $a \in \mathbb{C}$. Rozkladem na reálnou a imaginární část získáme užitečné vztahy

$$\int \exp(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx = \frac{\exp(\alpha x)}{\alpha^2+\beta^2}\big[\alpha\cos(\beta x) + \beta\sin(\beta x)\big]\,,$$
$$\int \exp(\alpha x)\sin(\beta x)\,dx = \frac{\exp(\alpha x)}{\alpha^2+\beta^2}\big[\alpha\sin(\beta x) - \beta\cos(\beta x)\big]\,.$$

6. Hlubší vlastnosti derivace.

Hloubka se musí skrýt. Kde? Na povrchu.
(Hofmannstahl)

Úmluva. V celé kapitole jsou I a J intervaly (libovolného typu.)

Lemma 6.1. (Plíživé lemma.) Nechť $M \subset [a, b]$ má následující tři vlastnosti:
(i) $a \in M$
(ii) je-li $x_0 \in M$ a $x_0 < b$, pak $\exists x_1 \in M$ takové, že $x_1 > x_0$
(iii) má-li $y \in (a, b]$ tu vlastnost, že pro $\forall\delta > 0$ obsahuje $U_-(y, \delta)$ bod z M, pak nutně $y \in M$.
Tvrdíme, že (i), (ii), (iii) implikuje $b \in M$.

Poznámka. Předpoklady (i), (ii) samy k závěru nestačí: polož $[a, b] = [0, 1]$, $M = \{0, 1/2, 2/3, 3/4, \dots\}$. (Ovšem 1 má zjevně vlastnost, popsanou v bodě (iii).)

Lemma 6.1. Nechť $f(x)$ je spojitá (resp. spojitá zprava, zleva) v bodě x_0. Potom $f(x)$ je omezená na jistém $U(x_0)$ (resp. $U_+(x_0)$, $U_-(x_0)$.)

Věta 6.1. Nechť $f(x)$ je spojitá na omezeném, uzavřeném intervalu I. Potom $f(x)$ je na I omezená.

Poznámka. Předpoklady nelze oslabit:
- $f(x) = 1/x$ je spojitá na $(0, 1]$, ale není omezená (interval není uzavřený)
- $f(x) = 1/x$ pro $x \in (0, 1]$, $f(0) = 0$ není omezená na $[0, 1]$ (funkce není spojitá v 0 zprava)

Definice. Nechť $f(x) : I \to \mathbb{R}$.

Řekneme, že $f(x)$ má v bodě $x_0 \in I$ maximum (podrobně: globální maximum vzhledem I), jestliže $f(x_0) \geq f(x)$ pro $\forall x \in I$.
Řekneme, že $f(x)$ má v bodě $x_0 \in I$ lokální maximum (vzhledem k I), jestliže $\exists \delta > 0$ tak, že $f(x_0) \geq f(x)$ pro $\forall x \in I \cap U(x_0, \delta)$.
Má tam ostré lokální maximum, jestliže $\exists \delta > 0$ tak, že $f(x_0) > f(x)$ pro $\forall x \in I \cap P(x_0, \delta)$.
Analogicky: $f(x)$ má v bodě $x_0 \in I$ minimum (podrobně: globální minimum vzhledem I), jestliže $f(x_0) \leq f(x)$ pro $\forall x \in I$.
Řekneme, že $f(x)$ má v bodě $x_0 \in I$ lokální minimum (vzhledem k I), jestliže $\exists \delta > 0$ tak, že $f(x_0) \leq f(x)$ pro $\forall x \in I \cap U(x_0, \delta)$.
Má tam ostré lokální minimum, jestliže $\exists \delta > 0$ tak, že $f(x_0) < f(x)$ pro $\forall x \in I \cap P(x_0, \delta)$.
Souhrnný název pro maximum a minimum: extrém.

Věta 6.2. Nechť $f(x) : I \to \mathbb{R}$. Je-li x_0 vnitřní bod I a $f'(x_0)$ existuje a je nenulová, pak v x_0 není (ani lokální) extrém.

Důsledek. Je-li v bodě x_0 (lokální) extrém, pak nutně buď (i) x_0 je krajní bod, nebo (ii) $f'(x_0)$ neexistuje, nebo (iii) $f'(x_0) = 0$.

Příklady. ① $f(x) = |x|$ má v 0 globální minimum, avšak $f'(0)$ není nula (tato derivace neexistuje)
② $f(x) = x^3$ pro $x \in I = [-1, 1]$. Maximum je v $x = 1$, minimum v -1, ale v žádném z těchto bodů není $f'(x) = 0$. Naproti tomu $f'(0) = 0$, avšak 0 není (ani lokální) extrém.
Z příkladů je vidět, že ani jedna z implikací

$$\begin{aligned} f'(x_0) = 0 &\implies x_0 \text{ je extrém} \\ x_0 \text{ je extrém} &\implies f'(x_0) = 0 \end{aligned}$$

obecně neplatí.

Věta 6.3. Nechť $f(x)$ je spojitá na omezeném, uzavřeném intervalu I. Pak existuje $x_0 \in I$, v němž má $f(x)$ maximum. Také existuje $x_1 \in I$, v němž má $f(x)$ minimum.

Poznámka. Předpoklady opět nelze oslabit:
• $f(x) = x$ je na $(0, 1)$ spojitá, ale maxima/minima nikde nenabývá (interval není uzavřený)
• $f(x) = \frac{x \sin x}{x+1}$ - má v $[0, \infty)$ nekonečně mnoho lokálních extrémů, ale žádné globální

Věta 6.4. (Rolleova.) Nechť $f(x)$ je spojitá v $[a, b]$, nechť $f(a) = f(b) = 0$ a nechť $f'(x)$ existuje pro $\forall x \in (a, b)$. Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Věta 6.5. (Lagrangeova.) Nechť $f(x)$ je spojitá v $[a, b]$ a nechť $f'(x)$ existuje pro $\forall x \in (a, b)$. Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Příklad. $\sin x < x$ pro $\forall x > 0$.

Věta 6.6. Nechť existuje $\delta > 0$ tak, že $f(x)$ je spojitá na $U(x_0, \delta)$ a $f'(x)$ existuje pro $\forall x \in P(x_0, \delta)$. Potom

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)\,,$$

pokud limita vpravo existuje. Jednostranná verze: nechť $f(x)$ je spojitá na $U_+(x_0, \delta)$ a $f'(x)$ existuje pro $\forall x \in P_+(x_0, \delta)$. Potom

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} f'(x)\,,$$

pokud limita vpravo existuje.

Příklady. ①

$$\arcsin'_-(1) = \lim_{x \to 1-} \arcsin x = \lim_{x \to 1-} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \infty\,.$$

② $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$. Pro $x \neq \pm 1$ je $f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$ a tedy

$$f'(-1) = \lim_{x \to 1} \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}} = -\infty\,.$$

Lemma 6.3. Nechť $F(x)$, $f(x)$ jsou spojité na $U(x_0, \delta)$ a nechť $F'(x) = f(x)$ na $P(x_0, \delta)$. Pak $F'(x_0) = f(x_0)$.

Definice. Řekneme, že $f(x)$ má v I Darbouxovu vlastnost, jestliže platí: pokud γ leží mezi $f(a)$, $f(b)$, kde a, $b \in I$, pak existuje c mezi a, b takové, že $f(c) = \gamma$.

Poznámka. Věta 2.16. tedy říká: spojitá funkce má Darbouxovu vlastnost.

Věta 6.7. Nechť $f(x)$ je spojitá v otevřeném intervalu I a nechť $f'(x)$ existuje pro $\forall x \in I$. Potom $f'(x)$ má v I Darbouxovu vlastnost.

Poznámky. • Derivace spojité funkce nemusí být obecně spojitá - avšak podle předchozí věty má aspoň Darbouxovu vlastnost.
• Důsledek: funkce $\operatorname{sgn} x$ nemá primitivní funkci

Věta 6.8. (Cauchyho.) Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou spojité v $[a,b]$. Nechť pro $\forall x \in (a,b)$ existují vlastní $f'(x)$, $g'(x)$ a navíc $g'(x) \neq 0$. Potom existuje $c \in (a,b)$ tak, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,.$$

Věta 6.9. (l'Hospitalovo pravidlo.) Chceme počítat

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

Nechť $f'(x)$, $g'(x)$ existují vlastní, navíc $g'(x) \neq 0$ pro $\forall x \in P(x_0,\delta)$. Nechť platí buď
(a) $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ pro $x \to x_0$
nebo
(b) $|g(x)| \to \infty$ pro $x \to x_0$.
Potom

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

pokud limita vpravo existuje.

Příklady. ①

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{3x^2} = \frac{1}{3}\,.$$

②

$$\lim_{x\to 0+} x^a \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^{-a}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-ax^{-a-1}} = 0\,. \qquad (a>0)$$

③ $\frac{x}{2x+\sin x} \to 1/2$, avšak $\frac{1}{2+\cos x}$ limitu v ∞ nemá. Příklad ukazuje, že ve Věta 6.9 opačná implikace neplatí, neboli $f(x)/g(x)$ limitu může mít, i když $f'(x)/g'(x)$ jí nemá.
④

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin x \ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{\cos x \ln(1+x^2) + \sin x \frac{2x}{x^1+1}} = \dots$$

- příklad, kde v zásadě l'Hospital použít jde, ale je to mnohem pracnější, než přímé použití základních limit $\sin x/x \to 1$, $\ln(1+x^2)/x^2 \to 1$.

Věta 6.10. (Monotonie a znaménko derivace.) Nechť I je interval s krajními body a, b. Nechť $f(x)$ je spojitá v I, a nechť $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) \geq 0$ resp. $f'(x) \leq 0$ resp. $f'(x) < 0$) pro $\forall x \in (a,b)$. Potom $f(x)$ je rostoucí (resp. neklesající resp. nerostoucí resp. klesající) v I.

Příklad. $f(x) = x^2$. Protože $f'(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$, je $f(x)$ rostoucí v $[0, \infty)$. – Všimněte si, že informace o derivaci stačí uvnitř intervalu, závěr platí až do kraje.

Lemma 6.4. Nechť I je interval s krajními body a, b. Nechť $f(x)$ je spojitá v I, a nechť $f'(x) \neq 0$ pro $\forall x \in (a, b)$. Potom $f(x)$ je ryze monotónní v I.

Definice. Funkce $f(x)$ se nazve konvexní v I, jestliže pro $\forall x_1 < x_2 < x_3 \in I$ platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}\,.$$

Pokud místo $\leq$ požadujeme $<$ resp. $\geq$ resp. $>$, jde o funkci ryze konvexní resp. konkávní resp. ryze konkávní.

Lemma 6.5. Funkce $f(x)$ je konvexní v I, právě když pro $\forall a < b \in I$ a pro $\forall \lambda \in (0, 1)$ platí

$$f\big(\lambda a + (1 - \lambda) b\big) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda) f(b)\,.$$

Věta 6.11. (Konvexita a monotonie derivace.) Nechť I je interval s krajními body a, b. Nechť $f(x)$ je spojitá v I, a nechť $f'(x)$ je rostoucí (resp. neklesající resp. nerostoucí resp. klesající) v (a, b). Potom $f(x)$ je ryze konvexní (resp. konvexní resp. konkávní resp. ryze konkávní) v I.

Příklad. $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$. Pro $x \in (-\infty, 0)$ je $f'(x) = \frac{1}{1-x}$ a tato funkce v $(-\infty, 0)$ klesá. Původní funkce je spojitá (dokonce v $\mathbb{R}$), tedy $f(x)$ je ryze konvexní v $(-\infty, 0]$. Analogicky: je ryze konvexní v $[0, \infty)$. Přesto není konvexní v $\mathbb{R}$.
Snadno si rozmyslím, že $f(x)$ roustoucí v $(a, b]$, $f(x)$ roustoucí v $[b, c)$ implikuje $f(x)$ roustoucí v (a, c) – pro konvexitu tedy podobná úvaha neplatí.

Věta 6.12. (Znaménko $f''(x)$ a konvexita.) Nechť I je interval s krajními body a, b. Nechť $f(x)$ je spojitá v I, a nechť $f''(x)$ existuje konečná pro $\forall x \in (a, b)$ a $f''(x) > 0$ (resp. $f''(x) \geq 0$ resp. $f''(x) \leq 0$ resp. $f''(x) < 0$) pro $\forall x \in (a, b)$. Potom $f(x)$ je ryze konvexní (resp. konvexní resp. konkávní resp. ryze konkávní) v I.

Definice. Řekneme, že x_0 je inflexní bod funkce $f(x)$, jestliže
(i) existuje $f'(x_0)$
(ii) existuje $\delta > 0$ tak, že na jednom z intervalů $(x_0, x_0 + \delta)$, $(x_0 - \delta, x_0)$ je $f(x)$ ryze konvexní a na druhém ryze konkávní.

Příklady. 1 $f(x) = \sin x$ má v $x = 0$ inflexní bod.
2 $f(x) = x^2$ pro $x < 0$, a $f(x) = \sqrt{x}$ pro $x \geq 0$. Potom $f(x)$ je ryze konvexní na $(-\infty, 0]$, ryze konkávní na $[0, \infty)$ - ovšem $x = 0$ není dle naší definice inflexní bod: derivace $f'(0)$ neexistuje.

7. Posloupnosti.

Definice. Posloupnost je zobrazení $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, přičemž místo $a(n)$ píšeme a_n. Celou posloupnost značíme $\big\{a_n\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ nebo krátce $\{a_n\}$.

Příklady. ① $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = (-1)^n$, $c_n = \frac{n^n}{n!}$ ...
② posloupnost zadaná rekurentně: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$; $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (Fibonacci)

Definice. Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ se nazve limitou posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big[n \geq n_0 \implies a_n \in U(a, \varepsilon)\big] .$$

Značíme $a_n \to a$ nebo $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.
Terminologie: pokud posloupnost má konečnou (vlastní) limitu, říkáme, že konverguje. Pokud $a_n \to \pm\infty$, říkáme, že $\{a_n\}$ diverguje do $\pm\infty$. Pokud a_n nemá limitu, říkáme, že osciluje.

Poznámky. • $a_n \to a \in \mathbb{R}$ lze ekvivalentně vyjádřit jako

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big[n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon\big] .$$

Pokud $a_n \to \infty$, je to totéž jako

$$\big(\forall K > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big[n \geq n_0 \implies a_n > K\big] .$$

• velice užitečné je následující pozorování: $a_n \to a$ právě když platí: pro každé $\varepsilon > 0$ pevné je $a_n \in U(a, \varepsilon)$ pro všechna n až na konečně výjimek.

Příklady. ① $a_n = \frac{1}{n} \to 0$.
② $b_n = (-1)^n$ nemá limitu.

Poznámky. Platí:
(i) Jestliže $a_n \to a$, $b_n \to b$, pak

$$\begin{aligned} a_n + b_n &\to a + b \\ a_n b_n &\to ab \\ a_n/b_n &\to a/b \end{aligned}$$

má-li výraz napravo smysl (srovnej Věty 2.3, 2.7.)
(ii) Jestliže $\alpha \leq a_n \leq \beta$ pro $\forall n$, a platí $a_n \to a$, je také $\alpha \leq a \leq \beta$. Srovnej s Větou 2.9.
(iii) Je-li $b_n \leq a_n \leq c_n$ pro $\forall n$, a platí $b_n \to a$, $c_n \to a$, je také $a_n \to a$. Viz Věta 2.10 ("o dvou policajtech").
(iv) Jestliže $a_n \to 0$, a posloupnost $\{b_n\}$ je omezená, je $a_n b_n \to 0$. Srovnej s Větou 2.4.

Definice. Posloupnost $\{a_n\}$ se nazve omezená, jestliže $\exists K > 0$ tak, že $|a_n| \le K$ pro $\forall n$. Posloupnost se nazve rostoucí (resp. neklesající resp. nerostoucí resp. klesající), platí-li $a_n < a_{n+1}$ (resp. $a_n \le a_{n+1}$ resp. $a_n \ge a_{n+1}$ resp. $a_n > a_{n+1}$) pro $\forall n$.

Věta 7.1. Konvergentní posloupnost je omezená.

Věta 7.2. Nechť $\{a_n\}$ je monotónní. Potom $\{a_n\}$ má limitu. Je-li navíc omezená, pak konverguje (tj. má konečnou limitu.)

Definice. Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ se nazve hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže pro $\forall \varepsilon > 0$ pevné nastává $a_n \in U(a, \varepsilon)$ pro nekonečně mnoho n.

Poznámky. • $a_n = (-1)^n$ má dva hromadné body: 1 a -1.
• $b_n = \sin n$ ... dá se ukázat, že hromadné body tvoří interval $[-1, 1]$.
• jestliže $a_n \to a$, tak a je hromadný bod, a je to jediný hromadný bod.

Definice. Je dána posloupnost $\{a_n\}$. Řekneme, že $\{b_n\}$ je podposloupnost $\{a_n\}$ (neboli posloupnost vybraná z $\{a_n\}$), existuje-li rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taková, že $b_n = a_{k_n}$.

Věta 7.3. Číslo a je hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$, právě když z $\{a_n\}$ lze vybrat podposloupnost, jejíž limita je a.

Věta 7.4. (Bolzano-Weierstrassova.) Nechť $\{a_n\}$ je omezená. Potom $\{a_n\}$ má konvergentní podposloupnost.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku (neboli je cauchyovská), jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big[m, n \ge n_0 \implies |a_m - a_n| < \varepsilon\big] .$$

Věta 7.5. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:
(1) posloupnost $\{a_n\}$ konverguje.
(2) posloupnost $\{a_n\}$ je cauchyovská.

Poznámka. Někdy je pro nás podstatné, zda posloupnost konverguje nebo nekonverguje, zatímco konkrétní hodnota limity nás nezajímá. A v tom je užitečnost B.C. podmínky: umí rozhodnout, zda posloupnost konverguje, aniž hovoří o její limitě.

Věta 7.6. (Heineho.) Nechť $f(x)$ je definována na nějakém $P(x_0)$. Potom je ekvivalentní:
(1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$.
(2) pro každou posloupnost $\{x_n\}$, splňující
(i) $x_n \to x_0$
(ii) $x_n \ne x_0$ pro $\forall n$

platí, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ má limitu A.

Poznámka. Jednostranná verze: nechť $f(x)$ je definována na nějakém $P_+(x_0)$. Potom je ekvivalentní:
(1) $\lim_{x\to x_0+} f(x) = A$.
(2) pro každou posloupnost $\{x_n\}$, splňující
(i) $x_n \to x_0$
(ii) $x_n > x_0$ pro $\forall n$
platí, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ má limitu A.

Věta 7.6. Nechť $f(x)$ je definována v intervalu I. Potom je ekvivalentní:
(1) $f(x)$ je spojitá v I.
(2) pro každou posloupnost $\{x_n\}$, splňující
(i) $x_n \to x_0$
(ii) $x_0 \in I$, $x_n \in I$ pro $\forall n$
platí, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ má limitu $f(x_0)$.

Poznámka. Podobně platí: $f(x)$ je spojitá v bodě x_0, právě když pro každou posloupnost, splňující $x_n \to x_0$, platí, že $f(x_n) \to f(x_0)$.

Příklady. ① Důležitá limita:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

② Neexistující limita:

$$\lim_{x\to 0+} \sin\frac{1}{x}\,.$$

③ Rekurentně zadaná posloupnost $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ má limitu 2.

8. Aproximace funkcí polynomy.

Definice. Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou definovány na nějakém $P(x_0)$. Řekneme, že $f(x)$ je "malé ó $g(x)$" pro $x \to x_0$, jestliže

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

Značíme: $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$.
Řekneme, že $f(x)$ je "velké ó $g(x)$" pro $x \to x_0$, jestliže existují $C > 0$, $\delta > 0$ tak, že

$$|f(x)| \le C|g(x)| \qquad \forall x \in P(x_0,\delta)\,.$$

Značíme: $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$.

Řekneme, že $f(x)$ je řádově rovno $g(x)$ pro $x \to x_0$, jestliže limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existuje a je konečná a nenulová. Značíme: $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$.

Poznámky. Názorně:
$f(x) = o(g(x))$ ... $f(x)$ je mnohem menší než $g(x)$
$f(x) = O(g(x))$ ... $f(x)$ je nejvýše jako konstanta krát $g(x)$
$f(x) \sim g(x)$ ... $f(x)$, $g(x)$ se chovají v zásadě stejně.

Příklady. ① $\ln x = o(\sqrt{x})$, $x \to \infty$.
② $\frac{\sin x}{x^2+1} = O(\frac{1}{x^2})$, $x \to \infty$.
③ $\sin x \sim x$, $1 - \cos x \sim x^2$, $\ln(1+x) \sim x$, vše pro $x \to 0$.

Definice. Funkce $f(x)$ je dána. Potom k-tou derivaci $f(x)$ značíme $f^{(k)}(x)$ nebo $\frac{d^k}{dx^k} f(x)$ a definujeme jí induktivně takto:
(i) $f^{(0)}(x) = f(x)$, neboli funkci považujeme za nultou derivaci sebe sama;
(ii) $f^{(k+1)} = \left\{ f^{(k)}(x) \right\}'$, speciálně $f^{(1)}(x) = f'(x)$, $f^{(2)}(x) = f''(x)$ atd.

Definice. Nechť $f(x)$ je definována na otevřeném intervalu I. Řekneme, že $f(x)$ je třídy C^n na I, jestliže derivace $f^{(k)}(x)$ existují a jsou spojité na I pro každé $k = 0, 1, \ldots, n$. Značíme $f(x) \in C^n(I)$. Speciálně, $C^0(I) = C(I)$ je množina všech funkcí spojitých na I.
Symbolem $C^\infty(I)$ značíme třídu funkcí, pro něž derivace všech řádů existují a jsou spojité na I.

Poznámka. Idea aproximace funkce polynomem spočívá v následujícím: je dána funkce $f(x)$ na okolí bodu x_0. Sestrojíme polynom $p(x)$ tak, že
$p(x_0) = f(x_0)$
$p'(x_0) = f'(x_0)$
$\vdots$
$p^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$
Ukazuje se, že $p(x)$ funkci v blízkosti bodu x_0 dobře aproximuje - tím lépe, čím je větší n.
Např. funkce $f(x) = \cos(x)$ v blízkosti bodu 0. Máme $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$. Stejnou hodnotu, první a druhou derivaci v nule má polynom $p(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$, který také funkci $\cos x$ blízko počátku - jak vidno z grafu - dobře aproximuje.

Lemma 8.1. Pro x_0 pevné a $k \geq 0$ celé definujeme

$$Q_k(x) = \frac{1}{k!}(x - x_0)^k .$$

Speciálně $Q_0(x) = 1$ (díky úmluvě $0! = 1$, $(x - x_0)^0 = 1$), $Q_1(x) = x - x_0$, $Q_2(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \dots$.

Platí:

(1) $Q_k(x)$ je polynom stupně k

(2) $Q_0'(x) = 0$ a $Q_k'(x) = Q_{k-1}(x)$ pro $\forall k \geq 1$

(3) $Q^{(l)}(x_0)$ je rovno 1 pro $k = l$, zatímco pro $k \neq l$ je to 0

Definice. Nechť $f(x)$ je třídy C^n na nějakém $U(x_0)$. Potom výraz

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

nazveme n-tý Taylorův polynom funkce $f(x)$ o středu x_0. Značíme $T^f_{x_0,n}(x)$.

Věta 8.1. Nechť $f(x)$ je třídy C^n na nějakém $U(x_0)$. Potom

$$f(x) - T^f_{x_0,n}(x) = o\big((x - x_0)^n\big)\,, \qquad x \to x_0\,. \qquad (*)$$

Navíc $T^f_{x_0,n}(x)$ je jediný polynom stupně $\leq n$, který má vlastnost (*).

Příklady. ① $T^{\exp x}_{0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Tedy

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\,, \quad x \to 0\,.$$

② $T^{\sin x}_{0,2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, neboli

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})\,, \quad x \to 0\,.$$

③ $f(x) = (1 + x)^a$, kde $a \in \mathbb{R}$ je pevné. Potom

$$T^{f(x)}_{0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} x^k\,.$$

Tedy

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)\,, \quad x \to 0\,.$$

Poznámka. Pro $a \in \mathbb{R}$ a $k \geq 0$ celé definujeme zobecněné kombinační číslo jako

$$\binom{a}{k} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \dfrac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} & k \geq 1 \end{cases}$$

Pro $n \geq k \geq 0$ celá čísla je to ve shodě s původní definicí $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Taylorův rozvoj $(1+x)^a$ můžeme elegantně napsat jako

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} x^k + o(x^n)\,.$$

Všimněte si analogie s binomickou formulí.

Věta 8.2. Nechť $F(x)$ je třídy C^{n+1} na otevřeném intervalu I, a $x_0 \in I$ je pevné. Nechť $f(x) = F'(x)$ v I. Potom
(1)

$$\left\{T^F_{x_0,n+1}(x)\right\}' = T^f_{x_0,n}(x)\,.$$

(2) Naopak: buď $p(x) = T^f_{x_0,n}(x)$, a $P(x) = \int f(x)\,dx$. Potom při vhodné volbě $c \in \mathbb{R}$ platí

$$P(x) + c = T^F_{x_0,n+1}(x)\,.$$

Příklady. ①

$$T^{\cos x}_{0,2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,.$$

②

$$T^{\ln(1+x)}_{0,n}(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}\,.$$

Věta 8.3. 1. Nechť $f(x) = o(x^n)$, $g(x) = o(x^m)$ pro $x \to 0$, kde $m \geq n$. Potom $f(x) + g(x) = o(x^n)$ pro $x \to 0$.
2. Nechť $f(x) = o(x^n)$, $g(x) = o(x^m)$ pro $x \to 0$. Potom $f(x)g(x) = o(x^{m+n})$ pro $x \to 0$.
3. Nechť $f(x) = o(x^n)$ pro $x \to 0$. Potom $x^m f(x) = o(x^{m+n})$ pro $x \to 0$.
4. Nechť $f(x) = o(x^n)$ a nechť $g(x) \sim x^m$ pro $x \to 0$, kde $m \geq 1$. Potom $f(g(x)) = o(x^{mn})$ pro $x \to 0$.

Poznámka. Stručně můžeme předchozí pravidla vyjádřit takto:
$o(x^n) + o(x^m) = o(x^n)$ pokud $m \geq n$
$o(x^n)o(x^m) = o(x^{m+n})$
$x^m o(x^n) = o(x^{m+n})$
Všimněte si, že $o(x^n) - o(x^n)$ se rovná $o(x^n)$ (a ne tedy 0). To chápeme takto: rozdíl dvou funkcí, které obě jsou malé ó x^n je opět nějaká funkce, která je malé ó x^n.

Příklady. ①

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = \frac{-1}{3}$$

②

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{1+x^2} - 3\sqrt[3]{1+x^3} + 2\sqrt[4]{1+x^4}\right) = \frac{1}{2}$$

Definice. Nechť $f(x) \in C^n(I)$, kde I je otevřený interval a $x_0 \in I$ je pevné. Funkce

$$R_{n+1}(x) = f(x) - T^f_{x_0,n}(x)$$

se nazývá Taylorův zbytek funkce po n-tém členu.

Poznámka. Z předchozího víme, že $R_{n+1}(x) = o\big((x-x_0)^n\big)$ pro $x \to x_0$, tj. $R_{n+1}(x)$ je malé, pokud x je blízko x_0.
Nyní nás zajímá jiný problém - totiž zda také $R_{n+1}(x) \to 0$, pokud x je pevné, zatímco n se zvětšuje.

Věta 8.4. Nechť $f(x) \in C^{n+1}(I)$, kde I je otevřený interval a x_0, $x \in I$, $x_0 \neq x$ jsou zvolena pevně. Potom ostře mezi x, x_0 existuje θ takové, že

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,.$$

Výraz napravo se nazývá Lagrangeův tvar zbytku.

Lemma 8.2. Nechť $M > 0$ je pevné. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M^n}{n!} = 0\,.$$

Příklady.
① Pro každé $x \in \mathbb{R}$ pevné je

$$\exp x = \lim_{n\to\infty} T^{\exp x}_{0,n}(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\,.$$

② Pro každé $x \in \mathbb{R}$ pevné je

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

____(nepovinná část)

Poznámka. Místo $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}$ se zavádí symbol $\sum_{k=0}^{\infty}$.

Lemma 8.3. Nechť $|q| < 1$. Potom

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \,.$$

Lemma 8.4. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e < \frac{1}{n!n} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \,.$$

Důsledek. Číslo e je iracionální.

9. Určitý integrál.

Motivace. Studujeme následující problém: je dána funkce $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$, a my chceme najít číslo, které vyjadřuje plochu pod jejím grafem. Tato hodnota se nazývá určitý integrál (funkce f od a do b), značí se

$$\int_a^b f(x)\, dx \,.$$

Existuje řada způsobů, jak definovat integrál. Ty se neliší hodnotou výsledku; spíše třídou funkcí, které se jimi dají integrovat.
Stručně probereme dva přístupy: Newtonův integrál a Riemannův integrál. Ukážeme, že pro spojité funkce dávají stejné výsledky.

Definice. Je-li dána $f(x) : (a, b) \to \mathbb{R}$, pak $F(x)$ se nazývá primitivní funkce (zkratka PF) k $f(x)$ v (a, b), pokud $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$.

Definice. Nechť $F(x)$ je definována v (a, b). Má-li výraz

$$F(b-) - F(a+) = \lim_{x \to b-} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x)$$

smysl, nazýváme ho zobecněným přírustkem funkce $F(x)$ od a do b. Značíme $\big[F(x)\big]_a^b$ nebo $\big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b}$.

Poznámky. • je-li $F(x)$ spojitá v $[a, b]$, je $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$.
• situace, kdy $\big[F(x)\big]_a^b$ nemá smysl: 1. některá z limit $F(b-)$, $F(b+)$ neexistuje, 2. tyto limity sice existují, ale výraz $F(b-) - F(a+)$ je typu $\infty - \infty$.

Definice. Nechť $f(x)$ je definována v (a, b), a nechť $F(x)$ je PF k $f(x)$ v (a, b). Potom Newtonův integrál funkce $f(x)$ od a do b definujeme jako

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\, dx = \big[F(x)\big]_a^b \,,$$

má-li pravá strana smysl.

Příklady. ① $(\mathcal{N})\int_0^\infty \frac{dx}{x} = \infty$
② $(\mathcal{N})\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3$
③ $(\mathcal{N})\int_{-\infty}^\infty x\,dx$ neexistuje

Terminologie a značení. Množinu těch funkcí, pro které Newtonův integrál od a do b existuje a je konečný, značíme $\mathcal{N}(a,b)$. Množinu těch funkcí, pro které integrál existuje (a může být konečný nebo nekonečný), značíme $\mathcal{N}^*(a,b)$.

Lemma 9.1. (1) Nechť $\phi(x)$ je spojitá v intervalu I, nechť $\phi'(x) = 0$ pro $\forall x$ vnitřní bod I. Potom $\exists c \in \mathbb{R}$ tak, že $\phi(x) = c$ pro $\forall x \in I$.
(2) Nechť $F(x)$, $G(x)$ jsou spojité v intervalu I, nechť $F'(x)$, $G'(x)$ existují, jsou konečné a rovnají se pro $\forall x$ vnitřní bod I. Potom $\exists c \in \mathbb{R}$ tak, že $F(x) = G(x) + c$ pro $\forall x \in I$.

Věta 9.1. Nechť $f(x)$ je definována v (a,b), nechť $F(x)$, $G(x)$ jsou PF k $f(x)$ v (a,b). Potom

$$\big[F(x)\big]_a^b = \big[G(x)\big]_a^b .$$

Rovnost chápeme takto: má-li jedna strana smysl, má ho i druhá a rovnají se.

Důsledek. Definice Newtonova integrálu je korektní.

Věta 9.2. [Linearita N.i.] Nechť $f(x)$, $g(x) \in \mathcal{N}(a,b)$. Nechť α, $\beta \in \mathbb{R}$. Potom též $\alpha f(x) + \beta g(x) \in \mathcal{N}(a,b)$ a

$$(\mathcal{N})\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx + \beta(\mathcal{N})\int_a^b g(x)\,dx .$$

Věta 9.3. [Vztah N.i. a nerovnosti.] (1) Nechť $f(x) \in \mathcal{N}(a,b)$ a nechť $f(x) \geq 0$ pro $\forall x \in (a,b)$. Potom

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx \geq 0 .$$

(2) Nechť $f(x)$, $g(x) \in \mathcal{N}(a,b)$ a nechť $f(x) \geq g(x)$ pro $\forall x \in (a,b)$. Potom

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx \geq (\mathcal{N})\int_a^b g(x)\,dx .$$

(3) Nechť $f(x)$, $|f(x)| \in \mathcal{N}(a,b)$. Potom

$$\big|(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx\big| \leq (\mathcal{N})\int_a^b |f(x)|\,dx .$$

(4) Nechť $f(x) \in \mathcal{N}(a,b)$ a nechť $|f(x)| \le c$ pro $\forall x \in (a,b)$. Potom

$$\big|(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx\big| \le c(b-a)\,.$$

Věta 9.4. [Per-partes pro N.i.] Nechť $u(x)$, $v(x)$ mají vlastní derivaci pro $\forall x \in (a,b)$. Potom

$$(\mathcal{N})\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - (\mathcal{N})\int_a^b u(x)v'(x)\,dx\,,$$

jestliže výrazy napravo mají smysl a jsou konečné.

Věta 9.5. [Substituce pro N.i.] Nechť $f(x)$ je definována v (a,b). Nechť $\phi(t) : (\alpha,\beta) \to (a,b)$ je vzájemně jednoznačná funkce taková, že buď (i) $\phi(t)$ je rostoucí a $\phi'(t) > 0$, nebo (ii) $\phi(t)$ je klesající a $\phi'(t) < 0$. Potom

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{N})\int_\alpha^\beta f\big(\phi(t)\big)|\phi'(t)|\,dt\,.$$

Rovnost chápeme takto: má-li jedna strana smysl, má ho i druhá a rovnají se.

Dodatek k definici N.i. Pro $a > b$ definujeme

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx = -(\mathcal{N})\int_b^a f(x)\,dx\,,$$

má-li pravá strana smysl. Dále klademe

$$(\mathcal{N})\int_a^a f(x)\,dx = 0\,.$$

Poznámka. Je-li ve Větě 9.5. dokonce $\phi(t) : [\alpha,\beta] \to [a,b]$, platí

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{N})\int_{\phi_{-1}(a)}^{\phi_{-1}(b)} f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\,dt = \pm(\mathcal{N})\int_\alpha^\beta f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\,dt\,,$$

kde $\pm$ odpovídá případu $\phi(t)$ rostoucí/klesající.

Definice. Dělením D intervalu $[a,b]$ rozumíme konečnou posloupnost bodů $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, kde $x_0 = a$, $x_n = b$.
Je-li $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ omezená funkce, definujeme pro $i = 1 \ldots n$

$$m_i = \inf f([x_{i-1},x_i])\,, \qquad M_i = \sup f([x_{i-1},x_i])\,.$$

Čísla

$$s(D) = s(D,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_{i-1} - x_i)$$
$$S(D) = S(D,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_{i-1} - x_i)$$

nazýváme dolní resp. horní Riemannův součet funkce $f(x)$, příslušný dělení D.

Definice. Nechť $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ je omezená funkce. Potom supremum množiny

$$\{s(D);\ D \text{ je dělení } [a,b]\}$$

se nazývá dolní Riemannův integrál $f(x)$ od a do b a značí se

$$(\mathcal{R})\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx\,.$$

Naproti tomu infimum množiny

$$\{S(D);\ D \text{ je dělení } [a,b]\}$$

se nazývá horní Riemannův integrál $f(x)$ od a do b a značí se

$$(\mathcal{R})\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx\,.$$

Definice. Řekneme, že dělení $\tilde{D}$ je zjemněním dělení D, pokud $\tilde{D}$ obsahuje všechny body D. Značíme $D \subset \tilde{D}$.

Lemma 9.2. Nechť $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ je omezená funkce. (1) Jsou-li D, $\tilde{D}$ dělení intervalu $[a,b]$ a $D \subset \tilde{D}$, je $s(D) \le s(\tilde{D})$ a $S(D) \ge S(\tilde{D})$.
(2) Jsou-li D_1, D_2 libovolná dělení intervalu $[a,b]$, je $s(D_1) \le S(D_2)$.

Věta 9.6. Nechť $m \le f(x) \le M$ pro $\forall x \in [a,b]$. Potom

$$m(b-a) \le (\mathcal{R})\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx \le (\mathcal{R})\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx \le M(b-a)\,.$$

Definice. Nechť $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ je omezená funkce. Jestliže

$$(\mathcal{R})\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx = (\mathcal{R})\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx\,,$$

pak toto číslo se nazývá Riemannův integrál funkce $f(x)$ od a do b. Značí se

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Říkáme, že $f(x)$ má Riemannův integrál (je Riemannovsky integrovatelná) na $[a,b]$, píšeme $f(x)\in\mathcal{R}(a,b)$.

Příklady. 1 $(\mathcal{R})\int_0^1 x\,dx = 1/2$.

Poznámky. Lze dokázat (nebudeme dělat):
(1) Jsou-li $f(x)$, $g(x)\in\mathcal{R}(a,b)$, je také $\alpha f(x)+\beta g(x)\in\mathcal{R}(a,b)$ a platí

$$(\mathcal{R})\int_a^b \alpha f(x)+\beta g(x)\,dx = \alpha\cdot(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx + \beta\cdot(\mathcal{R})\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

(2) Pokud $f(x)\le g(x)$ pro $\forall x\in[a,b]$, tak

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx \le (\mathcal{R})\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

(3)

$$\left|(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx\right| \le (\mathcal{R})\int_a^b \big|f(x)\big|\,dx\,.$$

(4) Pokud $|f(x)|\le c$ pro $\forall x\in[a,b]$, tak

$$\left|(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx\right| \le c(b-a)\,.$$

Věta 9.7.[Intervalová aditivita pro R.i.] (1) Nechť $f(x)$ je omezená v $[a,b]$, nechť $c\in(a,b)$. Potom

$$(\mathcal{R})\int_{\underline{a}}^{c} f(x)\,dx + (\mathcal{R})\int_{\underline{c}}^{b} f(x)\,dx = (\mathcal{R})\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx$$
$$(\mathcal{R})\int_{a}^{\overline{c}} f(x)\,dx + (\mathcal{R})\int_{c}^{\overline{b}} f(x)\,dx = (\mathcal{R})\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx\,.$$

(2) Nechť $c\in(a,b)$ a nechť $f(x)\in\mathcal{R}(a,c)$, $f(x)\in\mathcal{R}(c,b)$. Potom též $f(x)\in\mathcal{R}(a,b)$ a platí

$$(\mathcal{R})\int_a^c f(x)\,dx + (\mathcal{R})\int_c^b f(x)\,dx = (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Dodatek k definici R.i. Pro $b < a$ definujeme

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx := -(\mathcal{R})\int_b^a f(x)\,dx\,.$$

Dále klademe $(\mathcal{R})\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Poznámka. S výše uvedeným dodatkem platí Věta 9.7. v tomto obecnějším tvaru: je-li $f(x) \in \mathcal{R}(\alpha, \beta)$, a čísla a, b, $c \in [\alpha, \beta]$ jsou libovolná, pak platí:

$$(\mathcal{R})\int_a^c f(x)\,dx + (\mathcal{R})\int_c^b f(x)\,dx = (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Lemma 9.3. [Postačující podmínka existence R.i.] Nechť $f(x)$ je omezená v $[a, b]$ a nechť platí:

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists \text{ dělení } D\big)\Big[S(D) - s(D) < \varepsilon\Big]\,.$$

Potom $f(x) \in \mathcal{R}(a, b)$.

Lemma 9.4. Nechť $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big(\forall x, y \in [a, b]\big)\Big[|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon\Big]\,.$$

Poznámka. Vlastnost v předchozím lemmatu se nazývá *stejnoměrná pojitost*; je o něco silnější než obyčejná spojitost v intervalu.

Věta 9.8. Nechť $f(x)$ je spojitá na $[a, b]$. Potom $f(x) \in \mathcal{R}(a, b)$.

Věta 9.9. Nechť $f(x)$ je omezená, monotónní v $[a, b]$. Potom $f(x) \in \mathcal{R}(a, b)$.

Věta 9.10. [R.i. s proměnnou horní mezí.] Nechť $f(x) \in \mathcal{R}(a, b)$ a $c \in [a, b]$ je pevné. Definuji funkci

$$F(x) := (\mathcal{R})\int_c^x f(t)\,dt\,, \qquad x \in [a, b]\,.$$

Potom:
(1) $F(x)$ je spojitá v $[a, b]$.
(2) $F'(x_0) = f(x_0)$ platí pro každé $x_0 \in (a, b)$, ve kterém je $f(x)$ spojitá.

Důsledek. Nechť $f(x)$ je spojitá v (a, b). Potom $f(x)$ má v (a, b) primitivní funkci.

Důsledek. Otázka "má daná $f(x)$ primitivní funkci?" má dva aspekty.

- čistě teoreticky, odpověď je ANO, pokud $f(x)$ je spojitá, (viz výše). Také víme, že odpověď je NE, pokud $f(x)$ nemá Darbouxovu vlastnost (díky Větě 6.7.)
- z praktického hlediska zní otázka malinko jinak: dokáži danou PF napsat vzorečkem (tj. vyjářit pomocí elementárních funkcí)? A to zdaleka vždy nejde.
Často uváděný příklad: funkce $f(x) = \exp(-x^2)$ určitě má PF (je spojitá), ale dá se dokázat, že tato primitivní funkce se nedá vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

Věta 9.11. [Vztah N.i. a R.i.] Nechť $f(x)$ je spojitá v $[a, b]$. Potom $f(x) \in \mathcal{N}(a, b)$ a platí

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Poznámky. K názornému významu integrálu: lze provést asi následující úvahu. Je-li dána funkce $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$, a jestliže číslo $P \in \mathbb{R}$ vyjadřuje "plochu pod grafem $f(x)$", pak nutně $P = (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx$.
Podobně lze odvodit řadu dalších vzorečků pro výpočet délky křivky, objemu/povrchu rotačního tělesa, souřadnic těžiště atd.

Poznámky.
Newtonův integrál - výhody: snadný výpočet z definice, umí i neomezené funkce/intervaly; nevýhody: spočívá na složitém pojmu (primitivní funkce), názorný význam není vůbec jasný
Riemannův integrál - výhody: elementární definice (supremum, infimum), názorný význam snadno zdůvodnitelný; nevýhody: takřka nelze spočítat z definice, funguje jen na omezených funkcích a intervalech
Klíčové je, že pro spojité funkce dávají oba typy integrálu stejný výsledek.